

INTRODUCCIÓN A SOLUCIÓN DE INTEGRALES CON PROGRAMACIÓN

Ing. Ember Zumba MSc. / Emily Travez



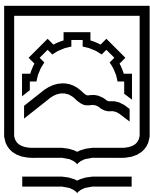
ESPOCH 2024

INTRODUCCIÓN A LA SOLUCIÓN DE INTEGRALES CON PROGRAMACIÓN

INTRODUCCIÓN A LA SOLUCIÓN DE INTEGRALES CON PROGRAMACIÓN

Ember Zumba

Emily Trávez



**Decanato
de Publicaciones**



esPOCH

Introducción a la solución de integrales con programación

©2022 Ember Zumba, Emily Trávez

©2024 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½

Instituto de Investigaciones

Dirección de Publicaciones Científicas

Riobamba, Ecuador

Teléfono: 593 (03) 2 998-200

Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*)

Corrección y diseño:

La Caracola Editores

Publicado en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa autorización por escrito de los propietarios del *Copyright*

CDU: 517 + 621.3

INTRODUCCIÓN A LA SOLUCIÓN DE INTEGRALES CON PROGRAMACIÓN

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Dirección de Publicaciones, año 2024

190 pp. vol: 17 x 24 cm q

ISBN: 978-9942-45-147-7

1. Análisis matemático

2. Electrónica

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN.....	6
CAPÍTULO I	8
1.1. INTEGRALES	8
1.1.1. Definición de integral	8
1.2. PARTES DE LA INTEGRAL	10
1.3. TIPOS DE INTEGRALES	11
1.3.1. Integral definida	11
1.3.4. Integral indefinida	12
1.3.4.1. Definición de derivada	12
1.3.4.2. Definición de antiderivada	13
1.3.4. Diferencia entre integral definida – integral indefinida	13
1.4. IMPORTANCIA DE LAS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN	14
1.5. FÓRMULAS DE LAS INTEGRALES	16
1.5.1. Fórmulas básicas	16
1.5.2. Fórmulas Trigonométricas	16
1.5.3. Fórmulas Trigonométricas Hiperbólicas	17
1.5.4. Fórmulas con $au + b$	18
1.5.5. Fórmulas con $au + bau + b$	20
1.5.6. Fórmulas con $u^2 + a^2u^2 + a^2$	22
1.5.7. Fórmulas con $u^2 - a^2u^2 - a^2$	23
1.5.8. Fórmulas con $a^2 - u^2, u^2 < a^2$ y $a^2 - u^2, u^2 < a^2$:	24
1.5.9. Fórmulas con $u^2 + a^2u^2 + a^2$	25
1.5.10. Fórmulas con $u^2 - a^2u^2 - a^2$:	27
CAPÍTULO II	30
2.2. IMPORTANCIA DE REALIZAR EJERCICIOS DE INTEGRALES ..	30
2.2.1. Recomendaciones para resolver integrales	31
2.2.2. Reglas básicas para la integración	32
Importancia de Python – Google Colab – GeoGebra	33
2.2.3. GeoGebra	34
2.2.4. Python	34
2.3. EJERCICIOS DE INTEGRALES DEFINIDAS	37
2.4. EJERCICIOS DE INTEGRALES INDEFINIDAS	134

CAPÍTULO III	157
3.1. EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN	157
3.2. Código para calcular el peso de un avión	157
3.3. Código Para Calcular Volumen de un Cilindro	158
3.4. Código para calcular determinante 3x3	159
3.5. Código para calcular el área de un triángulo rectángulo	160
3.6. Código para calcular el área de una circunferencia	161
3.7. Código para calcular el área de un cuadrado	162
3.8. Gráfica de una función cuadrática	163
3.9. Gráfica de una función cúbica	164
3.10. Movimiento rectilíneo uniforme MRU	166
3.11. Ley de OHM	168
3.12. Gráfica de la elipse	169
3.13. Gráfica de la hipérbola	170
3.14. Gráfica de la parábola	173
3.15. Gráfica de la circunferencia	175
3.16. Mándala	178
 LISTA DE FIGURAS	 180
TABLAS	184
REFERENCIAS	185
AUTORES	189

INTRODUCCIÓN

La integración es un análisis matemático fundamental del cálculo diferencial e integral que se enfoca en el proceso inverso de la derivación. Es decir, mientras que la derivación nos permite calcular la tasa de cambio instantáneo de una función en un punto dado, la integración nos permite calcular el área bajo una curva y, por lo tanto, la acumulación total de una magnitud en un intervalo determinado.

La integración tiene muchas aplicaciones prácticas en áreas como la física, la ingeniería, la economía y las ciencias sociales, entre otras. Además, existen varios métodos y técnicas de integración que permiten abordar una amplia variedad de funciones, desde polinomios simples hasta funciones trigonométricas y exponenciales complejas.

Integrar ecuaciones es un proceso que consiste en encontrar la función cuya derivada es igual a una función dada. En otras palabras, dada una función $f(x)$, la integral de $f(x)$ es una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. El proceso de integración se utiliza para determinar la función original a partir de su derivada. La integración nos permite calcular áreas, volúmenes de regiones, sólidos de revoluciones, velocidades y muchos otros conceptos importantes en una variedad de campos.

El libro *Integrales con programación* tiene como objetivo aportar conocimiento a los estudiantes de la Facultad de Ingeniería Mecánica para que puedan resolver ejercicios planteados por los docentes durante su período de estudio. Cuenta con ejercicios resueltos, gráficas y códigos de Google Colab de Programación; se realiza la resolución del problema de manera analítica, gráfica y a través de programación con códigos de Python.

El capítulo I está enfocado a la parte teórica de las integrales, donde se detallan las definiciones y fórmulas para los diferentes casos.

A continuación, en el capítulo II, se resuelven ejercicios de integrales definidas utilizando programación de Google Colab y GeoGebra para comparar las respuestas. Además se presenta la solución de ejercicios básicos de integrales indefinidas.

En capítulo III, se presentan ejercicios resueltos con gráficas y códigos de Google Colab por medio de programación con códigos de Python.

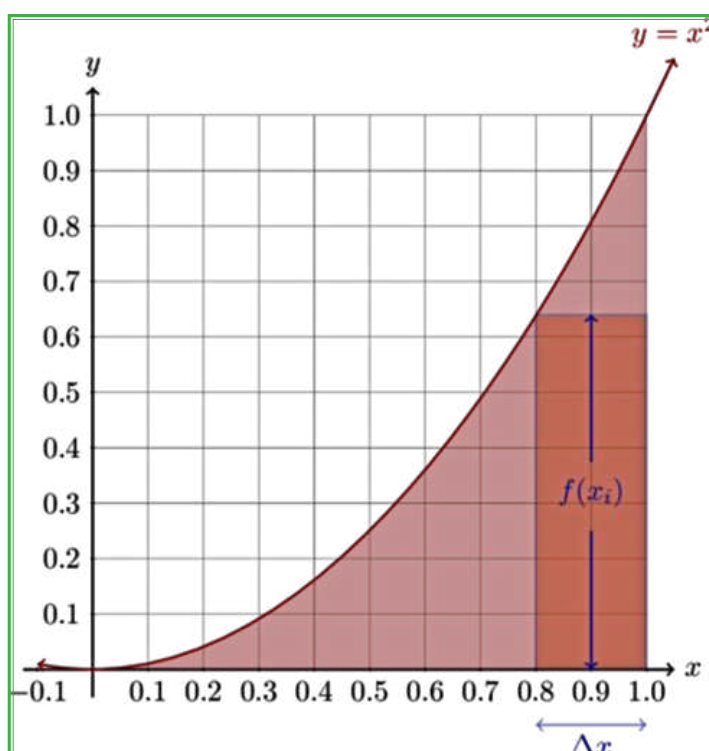
Este documento destaca la importancia de las matemáticas para resolver problemas concretos y abstractos en nuestro universo. Muchos estudiantes universitarios memorizan términos y conceptos sin reflexionar ni razonar, lo que dificulta la comprensión para dar una solución al problema. Se demuestra que la traducción del lenguaje cotidiano a lenguaje algebraico facilita el entendimiento para resolver ejercicios.

CAPÍTULO I

1.1 INTEGRALES

En matemáticas, el cálculo integral es una rama que se encarga de estudiar las propiedades, características y aplicaciones de las integrales. Una integral es una herramienta matemática que se utiliza para medir el área bajo una curva o superficie en un determinado intervalo o región (Smarter, 2020).

Figura 1.1. Área bajo la curva



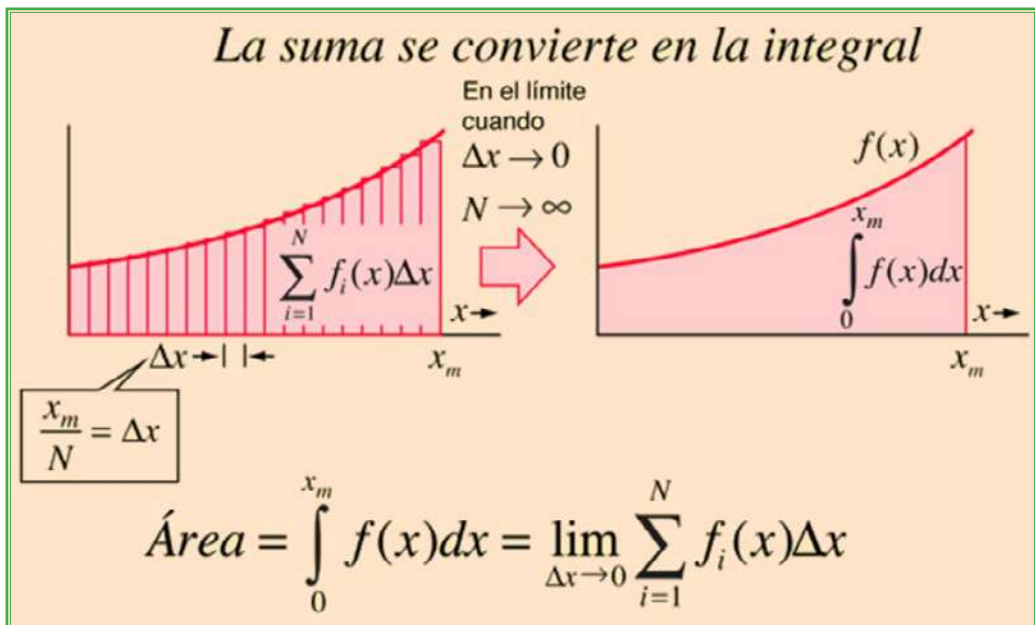
Fuente: Matemáticas, 2020

1.1.1. Definición de integral

La integral se representa mediante el símbolo $\int$ y puede ser de dos tipos: definida e indefinida. La integral definida tiene un valor numérico específico, mientras que la integral indefinida no tiene un valor numérico fijo y se representa con una constante de integración C (Tenorio, 2023).

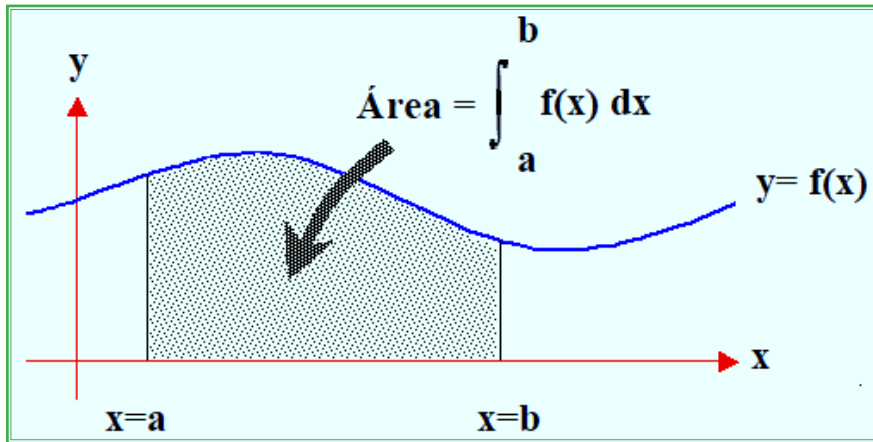
Las integrales se utilizan para medir el área bajo una curva o superficie en un determinado intervalo o región. Es una herramienta esencial en diversas áreas de las matemáticas, las ciencias y la ingeniería, como la física, la estadística, la economía, entre otras. Por ejemplo, en física, se utilizan para calcular la cantidad de trabajo realizado por una fuerza, mientras que en estadística se utilizan para calcular la probabilidad de un evento. En la ingeniería, se utilizan para calcular el área de secciones transversales de vigas y columnas, entre otras aplicaciones (Aguilar, 2023).

Figura 1.2. Integral



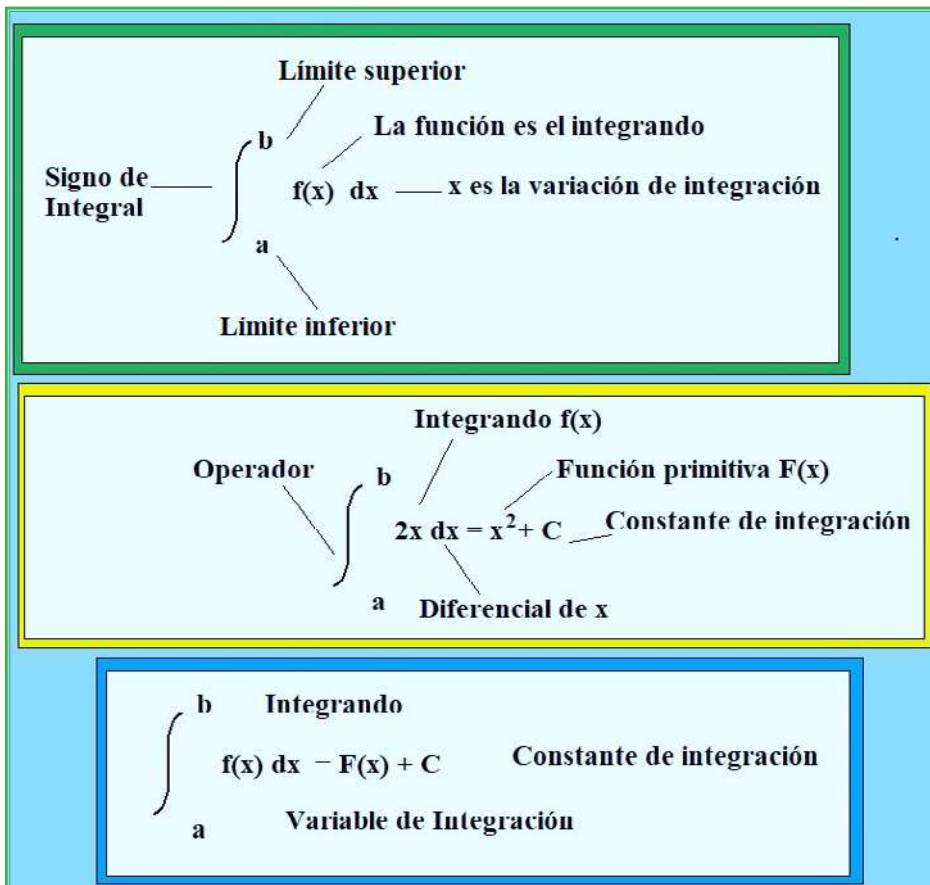
Fuente: Integral, 2021

Figura 1.3. Área bajo la curva



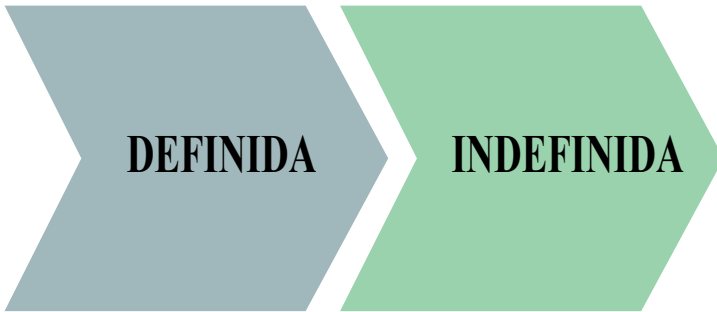
1.2. PARTES DE LA INTEGRAL

Figura 1.4. Partes de la integral



1.3. TIPOS DE INTEGRALES

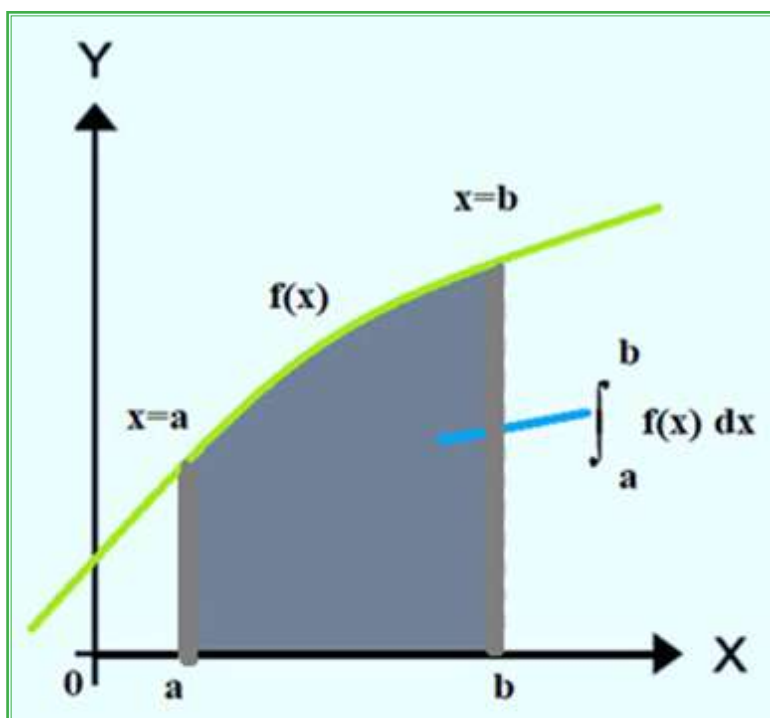
Figura 1.5. Tipos de integrales



1.3.1. Integral definida

La integral definida es un tipo de integral que tiene un valor numérico específico. Se calcula evaluando la función integrando en los límites de integración (el intervalo o región sobre el cual se está integrando). La integral definida se representa mediante el símbolo $\int f(x)dx$, donde $f(x)$ es la función integrando y dx representa el diferencial (define la variable con respecto a la cual se va a integrar la función integrando) de x . El valor de la integral definida se representa mediante una notación especial que indica los límites de integración, como $\int_a^b f(x)dx$, donde a y b son los límites inferior y superior de integración, respectivamente (García, 2021).

Mientras que, para Rondero (2011), la notación $\int_a^b f(x)dx$ representa una integral definida, que es un tipo de integral que tiene un valor numérico específico. El símbolo $\int$ indica que se está realizando una integral, $f(x)$ es la función integrando y dx representa el diferencial de x . Los límites inferior y superior de integración se indican en la notación especial $a-b$, donde a y b son los límites inferior y superior de integración, respectivamente. Por lo tanto, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Figura 1.6. Integral definida

1.3.4. Integral indefinida

La integral indefinida es un tipo de integral que no tiene un valor numérico específico. En lugar de eso, representa una familia de funciones que difieren en una constante de integración. La integral indefinida se representa mediante el símbolo $\int f(x)dx$, donde $f(x)$ es la función integrando y dx representa el diferencial de x . La constante de integración se agrega al final de la solución para indicar que hay una familia de soluciones posibles. Por ejemplo, si la integral indefinida de $f(x)$ es $F(x)$, entonces la familia de soluciones posibles es $F(x) + C$, donde C es una constante. La integral indefinida es una herramienta esencial en el cálculo diferencial e integral y se utiliza para encontrar funciones de antiderivada, entre otras aplicaciones (Pérez, 2015).

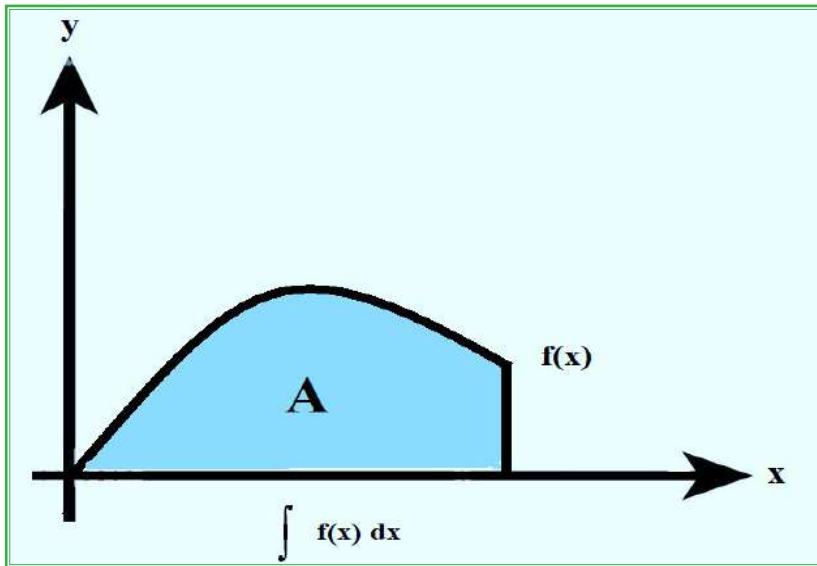
1.3.4.1. Definición de derivada

En cálculo diferencial y análisis matemático, la derivada de una función es la razón de cambio instantánea con la que varía el valor de dicha función matemática, según se modifique el valor de su variable independiente (Khan, 2023).

1.3.4.2. Definición de antiderivada

Según Matemática (2018), «la antiderivada es la función que resulta del proceso inverso de la derivación; es decir, consiste en encontrar una función que, al ser derivada, produce la función dada».

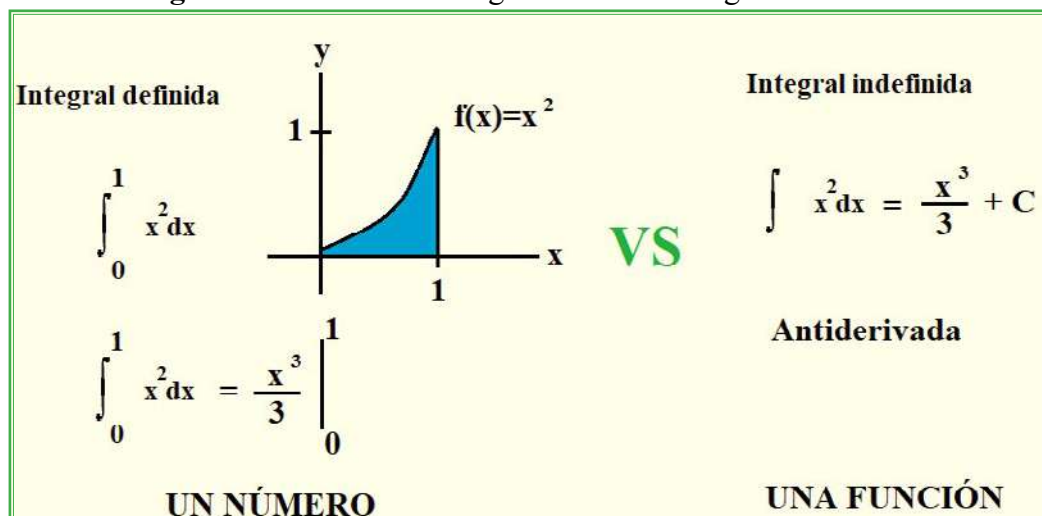
Figura 1.7. Integral indefinida



1.3.4. Diferencia entre integral definida e integral indefinida

La diferencia entre la integral definida y la integral indefinida radica en que la definida tiene un valor numérico específico y se calcula evaluando la función integrando en los límites de integración, mientras que la indefinida no tiene un valor numérico fijo y representa una familia de funciones que difieren en una constante de integración. En la integral definida, se utilizan los límites inferior y superior de integración para calcular el valor numérico específico de la integral, mientras que, en la integral indefinida, no se utilizan límites de integración y se busca la función cuya derivada es igual a la función integrando. La integral definida (integral definida de un racional, de un polinomio, de 1 hasta e, de identidades trigonométricas, de un logaritmo, en el intervalo) se representa mediante la notación $\int_a^b f(x)dx$, mientras que la integral indefinida se representa mediante la notación $\int f(x)dx$ (Portal, 2022).

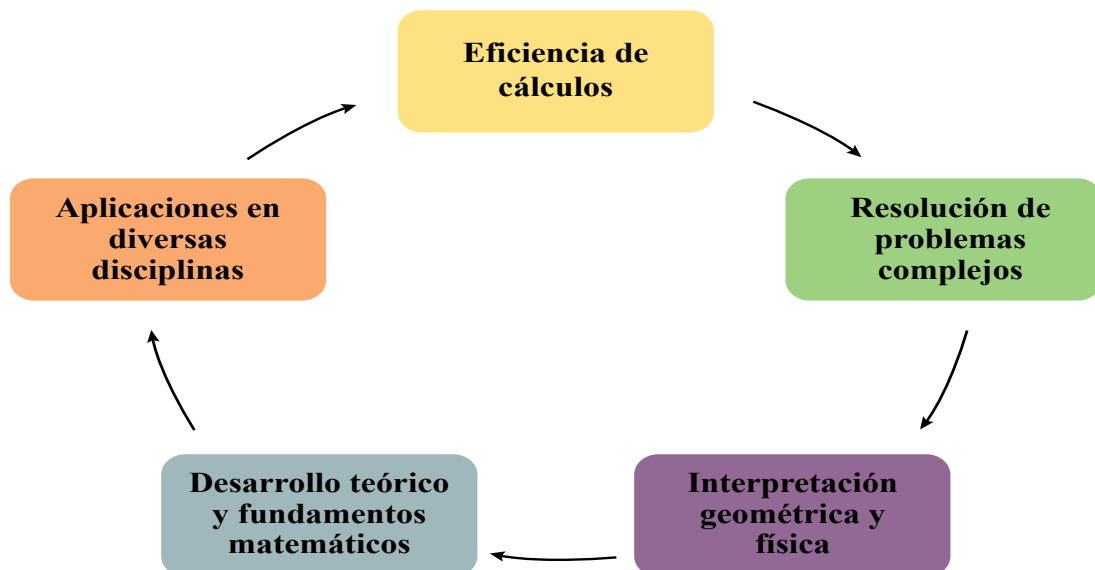
Figura 1.8. Diferencia integral definida - integral indefinida



1.4. IMPORTANCIA DE LAS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

Se debe mencionar que ya existen reglas bien definidas para el cálculo bajo la curva de una función básica, a las que se definen como fórmulas de integración, que permiten simplificar el tiempo de ejecución de la operación de integración.

Figura 1.9. Importancia de las fórmulas



Las fórmulas de integración son de gran importancia en el campo del cálculo y tienen diversas aplicaciones en la resolución de problemas. Se presentan algunas razones:

Eficiencia en cálculos

Las fórmulas de integración permiten realizar cálculos de manera eficiente y rápida. Proporcionan métodos predefinidos para encontrar soluciones analíticas a problemas de integración, lo que evita tener que recurrir a métodos numéricos aproximados.

Resolución de problemas complejos

Muchos problemas en matemáticas, ingeniería y otros campos pueden ser modelados y resueltos mediante ecuaciones diferenciales que requieren la aplicación de integración. Las fórmulas de integración proporcionan herramientas poderosas para abordar estos problemas y obtener soluciones exactas.

Interpretación geométrica y física

Las fórmulas de integración permiten interpretar el significado geométrico y físico de las integrales. Esto proporciona una comprensión intuitiva de las propiedades geométricas de las funciones.

Desarrollo teórico y fundamentos matemáticos

Las fórmulas de integración son fundamentales para el desarrollo teórico del cálculo. Proporcionan herramientas para el estudio de propiedades de funciones, tales como continuidad, derivabilidad, convergencia y convergencia uniforme. Además, las fórmulas de integración son utilizadas en la demostración de teoremas importantes como el teorema fundamental del cálculo.

Aplicaciones en diversas disciplinas

Las fórmulas de integración tienen aplicaciones en una amplia gama de disciplinas, incluyendo física, ingeniería, economía, estadística, probabilidad y muchas otras áreas científicas. Estas fórmulas permiten modelar fenómenos y resolver problemas en estos campos, lo que contribuye al avance de la ciencia y la tecnología.

Las fórmulas de integración son esenciales en el cálculo y tienen múltiples aplicaciones en la resolución de problemas en diversas áreas del conocimiento. Proporcionan métodos eficientes y precisos para calcular integrales, y son fundamentales en el desarrollo teórico de las matemáticas (Ferreira, 2023).

1.5. FÓRMULAS DE LAS INTEGRALES

Las fórmulas utilizadas en el libro son una recopilación de algunos autores que han sido seleccionadas para que los estudiantes que se encuentran ingresando al proceso de aprendizaje de las integradas puedan resolver sus ejercicios de manera eficiente. Agradecemos a José Alfredo Ramos Beltrán que, en libro *Cálculo integral*, argumenta las fórmulas de integrales. Esta información será utilizada con fines académicos

1.5.1. Fórmulas básicas

$$1. \int 0 dx = C$$

$$2. \int k dx = kx + C$$

$$3. \int (a \cdot u \pm b \cdot v) dx = a \int u dx \pm b \int v dx + C$$

$$4. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; \forall n \neq -1 \text{ regla de la potencia.}$$

$$5. \int u dv = uv - \int v du \text{ integración por partes.}$$

$$6. \int a^n du = \frac{a^n}{\ln(a)} + C$$

$$7. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$8. \int e^u dx = e^u + C$$

1.5.2. Fórmulas trigonométricas

$$9. \int \operatorname{sen}(u) du = -\cos(u) + C$$

$$10. \int \cos(u) du = \operatorname{sen}(u) + C$$

$$11. \int \tan(u) du = \begin{cases} \ln[\text{sen}(u)] + C \\ -\ln[\cos(u)] + C \end{cases}$$

$$12. \int \cot(u) du = \ln[\text{sen}(u)] + C$$

$$13. \int \sec(u) du = \begin{cases} \ln[\sec(u) + \tan(u)] + C \\ \ln\left[\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + C \end{cases}$$

$$14. \int \csc(u) du = \begin{cases} \ln[\csc(u) - \cot(u)] + C \\ \ln\left[\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right] + C \end{cases}$$

$$15. \int \sec^2(u) du = \tan(u) + C$$

$$16. \int \csc^2(u) du = -\cot(u) + C$$

$$17. \int \tan^2(u) du = \tan(u) - u + C$$

$$18. \int \cot^2(u) du = -\cot(u) - u + C$$

$$19. \int \text{sen}^2(u) du = \begin{cases} \frac{u}{2} - \frac{\text{sen}(2u)}{4} + C \\ \frac{1}{2}[u - \text{sen}(u) \cdot \cos(u)] + C \end{cases}$$

$$20. \int \cos^2(u) du = \begin{cases} \frac{u}{2} + \frac{\text{sen}(2u)}{4} + C \\ \frac{1}{2}[u + \text{sen}(u) \cdot \cos(u) + C] \end{cases}$$

$$21. \int \sec(u) \tan(u) du = \sec(u) + C$$

$$22. \int \cos(u) \cot(u) du = -\csc(u) + C$$

1.5.3. Fórmulas trigonométricas hiperbólicas

$$23. \int \text{senh}(u) du = \cosh(u) + C$$

$$24. \int \cosh(u) du = \operatorname{sen} h(u) + C$$

$$25. \int \tanh(u) du = \ln[\cosh(u)] + C$$

$$26. \int \coth(u) du = \ln[\operatorname{sen} h(u)] + C$$

$$27. \int \operatorname{sech}(u) du = \begin{cases} \operatorname{sen}^{-1}[\tanh(u)] + C \\ -2 \operatorname{tanh}^{-1}(e^u) + C \end{cases}$$

$$28. \int \operatorname{csch}(u) du = \begin{cases} \ln\left[\tanh\left(\frac{u}{2}\right)\right] + C \\ -2 \operatorname{coth}^{-1}(e^u) + C \end{cases}$$

$$29. \int \operatorname{sech}^2(u) du = \tanh(u) + C$$

$$30. \int \operatorname{csch}^2(u) du = -\coth(u) + C$$

$$31. \int \tanh^2(u) du = u - \tanh(u) + C$$

$$32. \int \coth^2(u) du = u - \coth(u) + C$$

$$33. \int \operatorname{sen} h^2(u) du = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} h(2u)}{4} - \frac{u}{2} + C \\ \frac{1}{2} [\operatorname{sen} h(u) \cdot \cosh(u) - u] + C \end{cases}$$

$$34. \int \cosh^2(u) du = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} h(2u)}{4} + \frac{u}{2} + C \\ \frac{1}{2} [\operatorname{sen} h(u) \cdot \cosh(u) + u] + C \end{cases}$$

$$35. \int \operatorname{sech}(u) \cdot \tanh(u) du = -\operatorname{sech}(u) + C$$

$$36. \int \operatorname{csch}(u) \cdot \coth(u) du = -\operatorname{csch}(u) + C$$

1.5.4. Fórmulas con $au + b$

$$37. \int \frac{du}{au + b} = \frac{1}{a} \ln(au + b) + C$$

$$38. \int \frac{u}{au + b} du = \frac{u}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(au + b) + C$$

$$39. \int \frac{u^2}{au+b} du = \frac{(au+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(au+b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3} \ln(au+b) + C$$

$$40. \int \frac{u^3}{au+b} du = \frac{(au+b)^3}{3a^4} - \frac{3b(au+b)^2}{2a^4} + \frac{3b^2(au+b)}{a^4} - \frac{b^3}{a^4} \ln(au+b) + C$$

$$41. \int \frac{du}{u(au+b)} = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{u}{au+b}\right) + C$$

$$42. \int \frac{du}{u^2(au+b)} = -\frac{1}{bu} + \frac{a}{b^2} \ln\left(\frac{au+b}{u}\right) + C$$

$$43. \int \frac{du}{(au+b)^2} = -\frac{1}{a(au+b)} + C$$

$$44. \int \frac{u}{(au+b)^2} du = \frac{b}{a^2(au+b)} + \frac{1}{a^2} \ln(au+b) + C$$

$$45. \int \frac{u^2}{(au+b)^2} du = \frac{au+b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(au+b)} - \frac{2b}{a^3} \ln(au+b) + C$$

$$46. \int \frac{du}{u(au+b)^2} = \frac{1}{b(au+b)} + \frac{1}{b^2} \ln\left(\frac{u}{au+b}\right) + C$$

$$47. \int \frac{du}{u^2(au+b)^2} = -\frac{a}{b^2(au+b)} - \frac{1}{b^2u} + \frac{2a}{b^3} \ln\left(\frac{au+b}{u}\right) + C$$

$$48. \int \frac{du}{(au+b)^3} = -\frac{1}{2(au+b)^2} + C$$

$$49. \int \frac{u}{(au+b)^3} du = -\frac{1}{a^2(au+b)} + \frac{b}{2a^2(au+b)^2} + \frac{1}{a^3} \ln(au+b) + C$$

$$50. \int \frac{u^2}{(au+b)^3} du = \frac{2b}{a^3(au+b)} - \frac{b^2}{2a^3(au+b)^2} \ln(au+b) + C$$

$$51. \int (au+b) du = \frac{(au+b)^2}{2a} + C$$

$$52. \int (au+b)^n du = \frac{(au+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C \quad \forall n \neq -1$$

$$53. \int u(au+b)^n du = \frac{(au+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(au+b)^{n+1}}{(n+1)a^2} \quad \forall n \neq -1, -2$$

$$54. \int u^2(au+b)^n du = \frac{(au+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{b(au+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(au+b)^{n+1}}{(n+1)a^3} + C$$

$$\forall n \neq -1, -2, -3$$

$$55. \int u^m (au + b)^n du = \begin{cases} \frac{u^{m+1}(au + b)^n}{m + n + 1} + \frac{nb}{m + n + 1} \int u^m (au + b)^{n-1} du \\ \frac{u^m (au + b)^{n+1}}{(m + n + 1)a} - \frac{mb}{(m + n + 1)a} \int u^{m-1} (au + b)^n du \\ -\frac{u^{m+1}(au + b)^{n+1}}{(n + 1)b} + \frac{m + n + 2}{(n + 1)b} \int u^m (au + b)^{n+1} du \end{cases}$$

1.5.5. Fórmulas con $\sqrt{au + b}$

$$56. \int \frac{du}{\sqrt{au + b}} = \frac{2\sqrt{au + b}}{a} + C$$

$$57. \int \frac{u}{\sqrt{au + b}} du = \frac{2(au - 2b)}{3a^2} \sqrt{au + b} + C$$

$$58. \int \frac{u^2}{\sqrt{au + b}} du = \frac{2(3a^2 u^2 - 4abu + 8b^2)}{15a^3} \sqrt{au + b} + C$$

$$59. \int \frac{du}{u\sqrt{au + b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left(\frac{\sqrt{au + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{au + b} + \sqrt{b}} \right) + C \\ \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{au + b}{-b}} + C \end{cases}$$

$$60. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{au + b}} = -\frac{\sqrt{au + b}}{bu} - \frac{a}{2b} \int \frac{du}{u\sqrt{au + b}}$$

$$61. \int \sqrt{au + b} du = \frac{2\sqrt{(au + b)^3}}{3a} + C$$

$$62. \int u\sqrt{au + b} du = \frac{2(3au - 2b)}{15a^2} \sqrt{(au + b)^3} + C$$

$$63. \int u^2 \sqrt{au + b} du = \frac{2(15a^2 u^2 - 12abu + 8b^2)}{105a^2} \sqrt{(au + b)^3} + C$$

$$64. \int \frac{\sqrt{au + b}}{u} du = 2\sqrt{au + b} + b \int \frac{du}{u\sqrt{au + b}}$$

$$65. \int \frac{\sqrt{au+b}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{au+b}}{u} + \frac{a}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{au+b}}$$

$$66. \int \frac{u^m}{\sqrt{au+b}} du = \frac{2u^m\sqrt{au+b}}{(2m+1)a} - \frac{2mb}{(2m+1)a} \int \frac{u^{m-1}}{\sqrt{au+b}} du$$

$$67. \int \frac{du}{u^m\sqrt{au+b}} du = -\frac{\sqrt{au+b}}{(m-1)bu^{m-1}} - \frac{(2m-3)a}{(2m-2)b} \int \frac{du}{u^{m-1}\sqrt{au+b}}$$

$$68. \int u^m\sqrt{au+b} du = \frac{2u^m}{(2m+3)a} (au+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2mb}{(2m+3)a} \int u^{m-1}\sqrt{au+b} du$$

$$69. \int \frac{\sqrt{au+b}}{u^m} du = -\frac{\sqrt{au+b}}{(m-1)u^{m-1}} + \frac{a}{2(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-1}\sqrt{au+b}}$$

$$70. \int \frac{\sqrt{au+b}}{u^m} du = -\frac{(au+b)^{\frac{3}{2}}}{(m-1)bu^{m-1}} - \frac{(2m-5)a}{(2m-2)b} \int \frac{\sqrt{au+b}}{u^{m-1}} du$$

$$71. \int (au+b)^{\frac{m}{2}} du = \frac{2(au+b)^{\frac{m+4}{2}}}{a(m+2)} + C$$

$$72. \int u(au+b)^{\frac{m}{2}} du = \frac{2(au+b)^{\frac{m+4}{2}}}{a^2(m+4)} - \frac{2b(au+b)^{\frac{m+4}{2}}}{a^2(m+2)} + C$$

$$73. \int u^2(au+b)^{\frac{m}{2}} du = \frac{2(au+b)^{\frac{m+6}{2}}}{a^3(m+6)} - \frac{4b(au+b)^{\frac{m+4}{2}}}{a^3(m+4)} + \frac{2b^2(au+b)^{\frac{m+2}{2}}}{a^3(m+2)} + C$$

$$74. \int \frac{(au+b)^{\frac{m}{2}}}{u} du = \frac{2(au+b)^{\frac{m}{2}}}{m} + b \int \frac{(au+b)^{\frac{m-2}{2}}}{u} du$$

$$75. \int \frac{(au+b)^{\frac{m}{2}}}{u^2} du = -\frac{(au+b)^{\frac{m+2}{2}}}{bu} + \frac{am}{2b} \int \frac{(au+b)^{\frac{m}{2}}}{u} du$$

$$76. \int \frac{du}{u(au+b)^{\frac{m}{2}}} = \frac{2}{b(m-2)(au+b)^{\frac{m-2}{2}}} + \frac{1}{b} \int \frac{du}{u(au+b)^{\frac{m-2}{2}}}$$

1.5.6. Fórmulas con $u^2 + a^2$

$$77. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$78. \int \frac{u}{u^2 + a^2} du = \frac{1}{2} \ln(u^2 + a^2) + C$$

$$79. \int \frac{u^2}{u^2 + a^2} du = u - a \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$80. \int \frac{u^3}{u^2 + a^2} du = \frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(u^2 + a^2) + C$$

$$81. \int \frac{du}{u(u^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left(\frac{u^2}{u^2 + a^2} \right) + C$$

$$82. \int \frac{du}{u^2(u^2 + a^2)} = -\frac{1}{a^2 u} - \frac{1}{a^3} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$83. \int \frac{du}{u^3(u^2 + a^2)} = -\frac{1}{2a^2 u^2} - \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{u^2}{u^2 + a^2} \right) + C$$

$$84. \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^2} = \frac{u}{2a^2(u^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$85. \int \frac{u}{(u^2 + a^2)^2} du = -\frac{1}{2(u^2 + a^2)} + C$$

$$86. \int \frac{u^2}{(u^2 + a^2)^2} du = -\frac{u}{2(u^2 + a^2)} + \frac{1}{2a} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$87. \int \frac{u^3}{(u^2 + a^2)^2} du = \frac{a^2}{2(u^2 + a^2)} + \frac{1}{2} \ln(u^2 + a^2) + C$$

$$88. \int \frac{du}{u(u^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(u^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^4} \left(\frac{u^2}{u^2 + a^2} \right) + C$$

$$89. \int \frac{du}{u^2(u^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{a^4 u} - \frac{u}{2a^4(u^2 + a^2)} - \frac{3}{2a^5} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$90. \int \frac{du}{u^3(u^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4 u^2} - \frac{1}{2a^4(u^2 + a^2)} - \frac{1}{a^6} \ln \left(\frac{u^2}{u^2 + a^2} \right) + C$$

$$91. \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n} = -\frac{u}{2a^2(n-1)(u^2 + a^2)^{n-1}} + 2n - \frac{3}{2n-2a^2} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}$$

$$92. \int \frac{u}{(u^2 + a^2)^n} du = -\frac{1}{2(n-1)(u^2 + a^2)^{n-1}} + C$$

$$93. \int \frac{du}{u(u^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)(u^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u(u^2 + a^2)^{n-1}} \int \frac{du}{u(u^2 + a^2)^{n-1}}$$

$$94. \int \frac{u^m}{(u^2 + a^2)^n} du = \int \frac{u^{m-2}}{(u^2 + a^2)^{n-1}} du - a^2 \int \frac{u^{m-2}}{(u^2 + a^2)^n} du$$

$$95. \int \frac{du}{u^m(u^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^m(u^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^{m-2}(u^2 + a^2)^n}$$

1.5.7. Fórmulas con $u^2 - a^2$

$$96. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C \\ -\frac{1}{a} \coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \end{cases}$$

$$97. \int \frac{u}{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2} \ln(u^2 - a^2) + C$$

$$98. \int \frac{u^2}{u^2 - a^2} du = u + \frac{a}{2} \ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C$$

$$99. \int \frac{u^3}{u^2 - a^2} du = \frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(u^2 - a^2) + C$$

$$100. \int \frac{du}{u(u^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln\left(\frac{u^2 - a^2}{u^2}\right) + C$$

$$101. \int \frac{du}{u^2(u^2 - a^2)} = \frac{1}{a^2 u} + \frac{1}{2a^3} \ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C$$

$$102. \int \frac{du}{u^3(u^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2 u^2} - \frac{1}{2a^4} \ln\left(\frac{u^2}{u^2 - a^2}\right) + C$$

$$103. \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^2} = -\frac{u}{2a^2(u^2 - a^2)} - \frac{1}{4a^3} \ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C$$

$$104. \int \frac{u}{(u^2 - a^2)^2} du = -\frac{1}{2(u^2 - a^2)} + C$$

$$105. \int \frac{u^2}{(u^2 - a^2)^2} du = -\frac{u}{2(u^2 - a^2)} + \frac{1}{4a} \ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C$$

$$106. \int \frac{u^3}{(u^2 - a^2)^2} du = -\frac{a}{2(u^2 - a^2)} + \frac{1}{2} \ln(u^2 - a^2) + C$$

$$\begin{aligned}
 107. \int \frac{du}{u(u^2 - a^2)^2} &= -\frac{1}{2a^2(u^2 - a^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln\left(\frac{u^2}{u^2 - a^2}\right) + C \\
 108. \int \frac{du}{u^2(u^2 - a^2)^2} &= -\frac{1}{a^4} - \frac{u}{2a^2(u^2 - a^2)} - \frac{3}{4a^5} \ln\left(\frac{u - a}{u + a}\right) + C \\
 109. \int \frac{du}{u^3(u^2 + a^2)^2} &= -\frac{1}{2a^4 u^2} - \frac{1}{2a^4(u^2 - a^2)} + \frac{1}{a^6} \ln\left(\frac{u^2}{u^2 - a^2}\right) + C \\
 110. \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^n} &= -\frac{u}{2a^2(n-1)(u^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{n-1}} \\
 111. \int \frac{u}{(u^2 - a^2)^n} du &= -\frac{1}{2(n-1)(u^2 - a^2)^{n-1}} + C \\
 112. \int \frac{du}{u(u^2 - a^2)^n} &= -\frac{1}{2a^2(n-1)(u^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u(u^2 - a^2)^{n-1}} \\
 113. \int \frac{u^m}{(u^2 - a^2)^n} du &= \int \frac{u^{m-2}}{(u^2 - a^2)^{n-1}} du + a^2 \int \frac{u^{m-2}}{(u^2 - a^2)^n} du \\
 114. \int \frac{du}{u^m(u^2 - a^2)^n} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^{m-2}(u^2 - a^2)^n} + \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^m(u^2 - a^2)^{n-1}}
 \end{aligned}$$

1.5.8. Fórmulas con $u^2 - a^2$, $u^2 < a^2$:

$$\begin{aligned}
 115. \int \frac{du}{a^2 - u^2} &= \begin{cases} \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) + C \\ \frac{1}{2} \tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \end{cases} \\
 116. \int \frac{u}{a^2 - u^2} du &= -\frac{1}{2} \ln(a^2 - u^2) + C \\
 117. \int \frac{u^2}{a^2 - u^2} du &= -u + \frac{a}{2} \ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) + C \\
 118. \int \frac{u^3}{a^2 - u^2} du &= -\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(a^2 - u^2) + C \\
 119. \int \frac{du}{u(a^2 - u^2)} &= \frac{1}{2a^2} \ln\left(\frac{u^2}{a^2 - u^2}\right) + C \\
 120. \int \frac{du}{u^2(a^2 - u^2)} &= \frac{1}{a^2 u} + \frac{1}{2a^3} \ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) + C \\
 121. \int \frac{du}{u^3(a^2 - u^2)} &= -\frac{1}{2a^2 u^2} + \frac{1}{2a^4} \ln\left(\frac{u^2}{a^2 - u^2}\right) + C
 \end{aligned}$$

$$122. \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^2} = \frac{u}{2a^2(a^2 - u^2)} + \frac{1}{4a^3} \ln \left(\frac{a+u}{a-u} \right) + C$$

$$123. \int \frac{u}{(a^2 - u^2)^2} du = \frac{1}{2(a^2 - u^2)} + C$$

$$124. \int \frac{u^2}{(a^2 - u^2)^2} du = \frac{u}{2(a^2 - u^2)} - \frac{1}{4a} \ln \left(\frac{a+u}{a-u} \right) + C$$

$$125. \int \frac{u^3}{(a^2 - u^2)^2} du = \frac{a^2}{2(a^2 - u^2)} + \frac{1}{2} \ln(a^2 - u^2) + C$$

$$126. \int \frac{du}{u(a^2 - u^2)} = \frac{1}{2a^2(a^2 - u^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{u^2}{a^2 - u^2} \right) + C$$

$$127. \int \frac{du}{u^2(a^2 - u^2)} = \frac{1}{a^2 u} + \frac{u}{2a^2(a^2 - u^2)} + \frac{3}{4a^5} \ln \left(\frac{a+u}{a-u} \right) + C$$

$$128. \int \frac{du}{u^3(a^2 - u^2)} = -\frac{1}{2a^2 u^2} + \frac{1}{2a^4(a^2 - u^2)} + \frac{1}{a^6} \ln \left(\frac{u^2}{a^2 - u^2} \right) + C$$

$$129. \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^n} = \frac{u}{2a^2(n-1)(a^2 - u^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{n-1}}$$

$$130. \int \frac{u}{(a^2 - u^2)^n} du = \frac{1}{2a^2(n-1)(a^2 - u^2)^{n-1}} + C$$

1.5.9. Fórmulas con $\sqrt{u^2 + a^2}$

$$131. \int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$132. \int u\sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$133. \int u^2\sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{4} - \frac{a^2 u\sqrt{u^2 + a^2}}{8} - \frac{a^4}{8} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$134. \int u^3\sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{a^2(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$135. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \begin{cases} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \\ \operatorname{sen} h^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \end{cases}$$

$$136. \int \frac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \sqrt{u^2 + a^2} + C$$

$$137. \int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$138. \int \frac{u^3}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - a^2 \sqrt{u^2 + a^2} + C$$

$$139. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C$$

$$140. \int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{2a^2u^2} + C$$

$$141. \int \frac{du}{u^3\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3} \ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C$$

$$142. \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C$$

$$143. \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} + \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$144. \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u^3} du = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{2u^2} - \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C$$

$$145. \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2\sqrt{u^2 + a^2}} + C$$

$$146. \int \frac{u}{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} du = -\frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} + C$$

$$147. \int \frac{u^2}{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} du = -\frac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}} + \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$148. \int \frac{u^3}{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} du = \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{u^2 + a^2}} + C$$

$$149. \int \frac{du}{u(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2\sqrt{u^2 + a^2}} - \frac{1}{a^3} \ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C$$

$$150. \int \frac{du}{u^2(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{a^4 u} - \frac{u}{a^4 \sqrt{u^2 + a^2}} + C$$

$$151. \int \frac{du}{u^3(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2a^2 u^2 \sqrt{u^2 + a^2}} - \frac{3}{2a^4 \sqrt{u^2 + a^2}} + \frac{3}{2a^5} \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right) + C$$

$$152. \int (u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} du = \frac{u(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3a^2 u \sqrt{u^2 + a^2}}{8} + \frac{4}{8} a^4 \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$153. \int u(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} du = \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

$$154. \int u^2(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} du \\ = \frac{u(u^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}{6} + \frac{a^2 u(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{24} - \frac{a^4 u \sqrt{u^2 + a^2}}{16} - \frac{a^6}{16} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$155. \int \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{u} du = \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + a^2 \sqrt{u^2 + a^2} - a^3 \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right) + C$$

$$156. \int \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{u^2} du = -\frac{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{u} + \frac{3u \sqrt{u^2 + a^2}}{2} + \frac{3}{2} a^2 \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

$$157. \int \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{u^3} du = -\frac{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{2u^2} + \frac{3}{2} \sqrt{u^2 + a^2} - \frac{3}{2} a \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right) + C$$

1.5.10. Fórmulas con $\sqrt{u^2 - a^2}$

$$158. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C$$

$$159. \int \frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}} du = \sqrt{u^2 - a^2} + C$$

$$160. \int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - a^2}} du = \frac{u \sqrt{u^2 - a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C$$

$$161. \int \frac{u^3}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \frac{(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + a^2 \sqrt{u^2 - a^2} + C$$

$$162. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$163. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u^2} + C$$

$$164. \int \frac{du}{u^3 \sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{2a^2 u^2} + \frac{1}{2a^3} \sec^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$165. \int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u\sqrt{u^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(u + \sqrt{u^2 - a^2} \right) + C$$

$$166. \int u\sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$167. \int u^2 \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{a^2 u \sqrt{u^2 - a^2}}{8} - \frac{a^4}{8} \ln \left(u + \sqrt{u^2 - a^2} \right) + C$$

$$168. \int u^3 \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{(u^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{a(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$169. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \sec^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$170. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln \left(u + \sqrt{u^2 - a^2} \right) + C$$

$$171. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^3} du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{2u^2} + \frac{1}{2a} \sec^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$172. \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

$$173. \int \frac{u}{(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} du = -\frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

$$174. \int \frac{u^2}{(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} du = -\frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}} + \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C$$

$$175. \int \frac{u^3}{(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} du = \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

$$176. \int \frac{du}{u(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{a^2 \sqrt{u^2 - a^2}} - \frac{1}{a^3} \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$177. \int \frac{du}{u^2(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^4 u} - \frac{u}{a^4 \sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

$$178. \int \frac{du}{u^2(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2a^2 u^2 \sqrt{u^2 - a^2}} - \frac{3}{2a^4 \sqrt{u^2 - a^2}} - \frac{3}{2a^5} \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$179. \int (u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} du = 2u\sqrt{u^2 - a^2} \left(\frac{1}{8}u^2 - \frac{5}{16}a^2\right) - \frac{3}{8}a^4 \ln(|-u + \sqrt{u^2 - a^2}|) + C$$

$$180. \int u(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} du = \frac{(u^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

$$181. \int u^2(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} du \\ = \frac{u(u^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}}{6} + \frac{a^2 u(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{24} - \frac{a^4 u \sqrt{u^2 - a^2}}{16} \\ + \frac{a^6}{16} \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C$$

$$182. \int u^3(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} du = \frac{(u^2 - a^2)^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{(u^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

Fuente: Ramos, 2021; Vaxa, 2022; Rubí, 2018; Integrales, 2016; Talca, 2019; Uson, 2016.

Nota: las fórmulas citadas en este libro fueron tomadas de los autores antes mencionados.

CAPÍTULO II

2.2. IMPORTANCIA DE REALIZAR EJERCICIOS DE INTEGRALES

Realizar ejercicios de integrales es de gran importancia por estas razones:

Fortalecimiento de habilidades matemáticas

La resolución de ejercicios de integrales permite practicar y desarrollar habilidades matemáticas fundamentales, como el cálculo, la manipulación algebraica, comprensión de conceptos matemáticos y definiciones. Estos ejercicios ayudan a mejorar la destreza en el manejo de las herramientas y técnicas de integración (Mora, 2003).

Comprender conceptos teóricos

Los ejercicios de integrales ayudan a consolidar la comprensión de los conceptos teóricos del cálculo integral. Al trabajar en la resolución de problemas prácticos, se adquiere una comprensión más profunda de la interpretación geométrica de las integrales, las propiedades de las funciones integrables y las aplicaciones de la integral en diversas disciplinas (Sánchez, 2023).

Desarrollo del pensamiento analítico

La resolución de ejercicios de integrales requiere un enfoque analítico y una capacidad para descomponer un problema complejo en pasos más manejables. Este proceso fomenta el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la capacidad de razonar de manera lógica y estructurada.

Realizar ejercicios de integrales es crucial para fortalecer habilidades matemáticas, comprender conceptos teóricos, aplicar integrales en otros campos, desarrollar el pensamiento analítico y prepararse para estudios superiores. Los ejercicios de integrales permiten adquirir experiencia práctica y dominio de esta poderosa herramienta matemática, lo que es fundamental para tener éxito en diversos campos académicos y profesionales (Pérez, 2020).

2.2.1. Recomendaciones para resolver integrales

Existen algunas recomendaciones generales para resolver integrales definidas:

Conocer bien la función que se va a integrar

Antes de comenzar a integrar, asegúrate de comprender la función que estás integrando. Familiarízate con sus propiedades y comportamiento.

Determinar el intervalo de integración

La integral definida se calcula sobre un intervalo específico. Asegúrate de determinar correctamente los límites de integración, es decir, el inicio y el final del intervalo.

Elegir el método de integración adecuado

Existen varios métodos para realizar integrales definidas, como integración directa, sustitución, integración por partes, fracciones parciales, entre otros. Seleccionar el método más adecuado para la función que estás integrando.

Aplicar las reglas de integrales

Utilizar las reglas básicas de integración; estas te ayudarán a simplificar y resolver la integral de manera más eficiente.

Evaluar los límites de integración

Una vez que haya realizado la integración propiamente dicha, evaluar los límites de integración para obtener el valor numérico de la integral definida. Sustituir los límites en la función integrada y realiza las operaciones necesarias para obtener el resultado final.

Verificar su respuesta

Después de calcular la integral definida, es importante verificar su respuesta. Puedes hacerlo utilizando métodos alternativos, como el teorema fundamental del cálculo o calculando la integral definida de forma aproximada utilizando métodos numéricos.

Recuerda: la práctica ayudará a mejorar tus habilidades de integración.

2.2.2. Reglas básicas para la integración

Aquí presentamos algunas reglas básicas de integración que serán útiles al calcular integrales según:

Tabla 1.1. Reglas de integración

Funciones comunes	Función	Integral
Constante	$\int a \, dx$	$ax + C$
Variable	$\int x \, dx$	$x^2/2 + C$
Cuadrada	$\int x^2 \, dx$	$x^3/3 + C$
Recíproca	$\int (1/x) \, dx$	$\ln x + C$
Exponencial	$\int e^x \, dx$	$e^x + C$
	$\int a^x \, dx$	$a^x/\ln(a) + C$
	$\int \ln(x) \, dx$	$x \ln(x) - x + C$
Trigonometría (x en <u>radianes</u>)	$\int \cos(x) \, dx$	$\sin(x) + C$
	$\int \sin(x) \, dx$	$-\cos(x) + C$
	$\int \sec^2(x) \, dx$	$\tan(x) + C$
Reglas	Función	Integral
Multiplicación por una constante	$\int cf(x) \, dx$	$c \int f(x) \, dx$
Potencias ($n \neq -1$)	$\int x^n \, dx$	$x^{n+1}/n+1 + C$
Suma	$\int (f + g) \, dx$	$\int f \, dx + \int g \, dx$
Resta	$\int (f - g) \, dx$	$\int f \, dx - \int g \, dx$

Fuente: Integración, 2019

Nota: la tabla es utilizada con fines académicos.

Regla de la constante

La integral de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la integral de la función. En términos matemáticos: $\int (cf(x)) \, dx = c \int f(x) \, dx$ (Sympy, 2020).

Regla del cambio de variable

Si realizas un cambio de variable en una integral, debes ajustar el diferencial de integración. Si sustituyes x por u en la integral, entonces dx se reemplaza por $du/dx * dx$. En términos matemáticos: $\int f(u) du = \int f(u(x)) * du/dx * dx$ (Integración, 2020).

Regla de la suma/resta

La integral de la suma o resta de dos funciones es igual a la suma o resta de las integrales de cada función. En términos matemáticos: $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ (Funciones, 2021).

Regla del poder

La integral de una función elevada a una potencia constante es igual a la función elevada a la potencia incrementada en uno, dividida por el nuevo exponente. En términos matemáticos: $\int x^n dx = (x^{(n+1)})/(n+1)$, donde $n \neq -1$ (González, 2020).

Regla del producto

La integral del producto de dos funciones se puede calcular utilizando la regla de integración por partes, que establece: $\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx$ (Didáctico, 2021).

Regla del cociente

La integral del cociente de dos funciones se puede calcular utilizando la regla de integración por fracciones parciales, cuando sea aplicable. En caso contrario, se pueden utilizar otros métodos, como la sustitución.

Estas son solo algunas de las reglas básicas de integración. Existen otras reglas más avanzadas y técnicas específicas para diferentes tipos de funciones (Integración, 2020).

Importancia de Python - Google Colab, GeoGebra

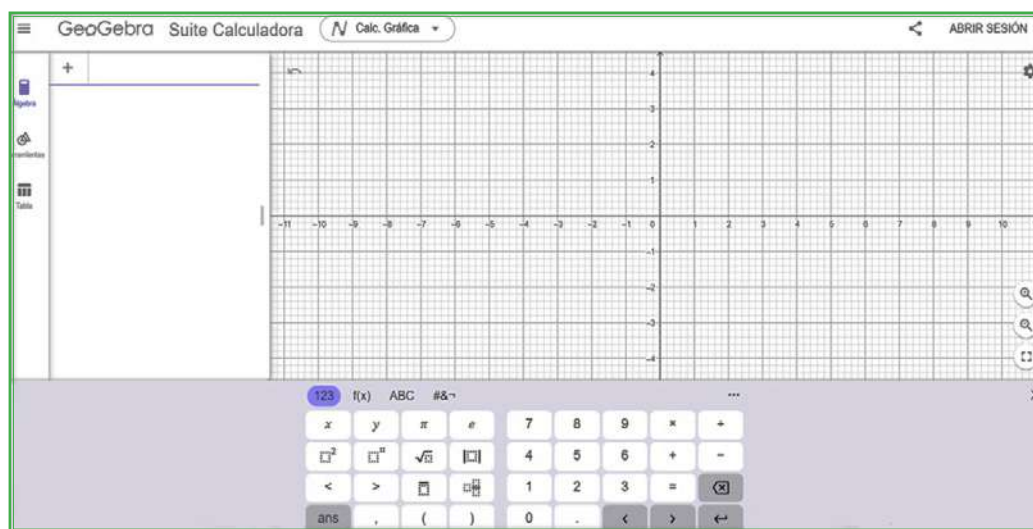
Python no está diseñado específicamente para el cálculo de integrales. Su amplia variedad de bibliotecas y su facilidad de uso lo convierten en una herramienta valiosa para realizar integración numérica de manera eficiente y efectiva a través de Python - Google Colab (Colab, 2023).

GeoGebra es una poderosa herramienta de matemáticas y geometría que combina características de un sistema de álgebra computacional con un *software* de geometría dinámica. Su importancia radica en su capacidad para crear, manipular y visualizar gráficas de manera interactiva (GeoGebra, 2023).

2.2.3. GeoGebra

GeoGebra es un *software* gratuito que permite visualizar y trabajar con conceptos matemáticos de manera dinámica y gráfica. Además de geometría y álgebra, también incluye herramientas para cálculo y estadística. Es una herramienta útil para docentes y estudiantes en todos los niveles educativos (Izquierdo, 2017).

Figura 2.1. GeoGebra



Fuente: GeoGebra, 2023b

2.2.4. Python

Python es un lenguaje de programación de alto nivel que se utiliza para desarrollar una amplia variedad de aplicaciones, desde aplicaciones web hasta análisis de datos y aprendizaje automático. Es conocido por su sintaxis clara y legible, lo que lo hace fácil de aprender y usar. Además, Python es un lenguaje de programación (Holguín, 2019).

Figura 2.2. Python

```

3
4 class Disease:
5     def __init__(self, name):
6         self.name = name
7         self.database_disease = []
8
9     def __repr__(self):
10        return "It seems you have {name}".format(name = self.name)
11
12    def check_disease_database(self, name_desease):
13        if name_desease == self.name:
14            print("We succesfully upload your disease")
15        else:
16            print("It seems we doesn't know yet this desease")
17
18    def add_disease_database(self, disease):
19        self.database_disease.append(disease)
20
21    def add_disease_symptoms(self, disease, symptom):
22        for i in range(0, len(self.database_disease)):
23            if self.database_disease[i] == disease:
24                self.database_disease[i] = [disease, symptom]
25
26        return self.database_disease
27
28    def add_disease_treatment(self, disease, treatment):
29        for i in range(0, len(self.database_disease)):
30            if disease == self.database_disease[i][0]:
31                self.database_disease[i].append(treatment)
32
33        return self.database_disease
34
35
36
37 class Patient:
38     def __init__(self, name, age, sex):
39         self.name = name
40         self.age = age
41         self.sex = sex
42         self.symptoms = []
43
44     def __repr__(self):
45        return "Welcome to your virtual doctor {name}".format( name = self.name)
46
47    def feel_sick(self, question):

```

Fuente: Python, 2019

Figura 2.3. Comandos de Python

Comando	Descripción	Ejemplo de uso
import	Carga un módulo de biblioteca para usarlo en el programa. Tiene dos formas: importación cualificada y no cualificada.	<pre>import sys from math import pi</pre>
def	Define una función reutilizable.	<pre>def hazAlgo(x): # Escribe X en StdIn sys.stdout.write(x)</pre>
=	Asigna una expresión a una variable.	<pre>x = 'Hello World!'</pre>
return	Devuelve una expresión como valor de retorno de una función. Se usa en el contexto de una función.	<pre>def perimCirc(r): return 2*pi*r</pre>
print	Muestra texto o variables en un canal de salida (pantalla o fichero). <i>En Python 3.x print es una función estándar de biblioteca más que un comando. Aunque está disponible de forma predeterminada (esto es, sin necesidad de importarla)</i>	<pre># En Python 3.x print ("Hello World!") # En Python 2.x print ("Hello World!")</pre>
if-else	Estructura de control que ejecuta código de forma condicional.	<pre>if x == 0: # Haz algo con x x = 1 else: # Haz otra cosa x = -1</pre>
for-loop	Estructura de control que ejecuta código de forma iterativa a través de los elementos de una colección.	<pre>for line in sys.stdin: hazAlgo(line)</pre>
while-loop	Estructura de control que ejecuta código de forma repetida mientras se cumpla una condición.	<pre>x = 10 while x != 0: hazAlgo(x) x -= 1</pre>
listas	Estructura de datos que representa la colección más básica y utilizada. Una lista es una colección de elementos ordenados. Aunque no es un comando, propiamente dicho, la estructura es tan básica y fundamental que aparece por derecho propio.	<pre>l = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] for e in l: hazAlgo(e)</pre>
rebanado	Forma de obtención de sublistas a partir de una lista existente	<pre>l = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] l2 = l[1:4:2]# [2,4]</pre>

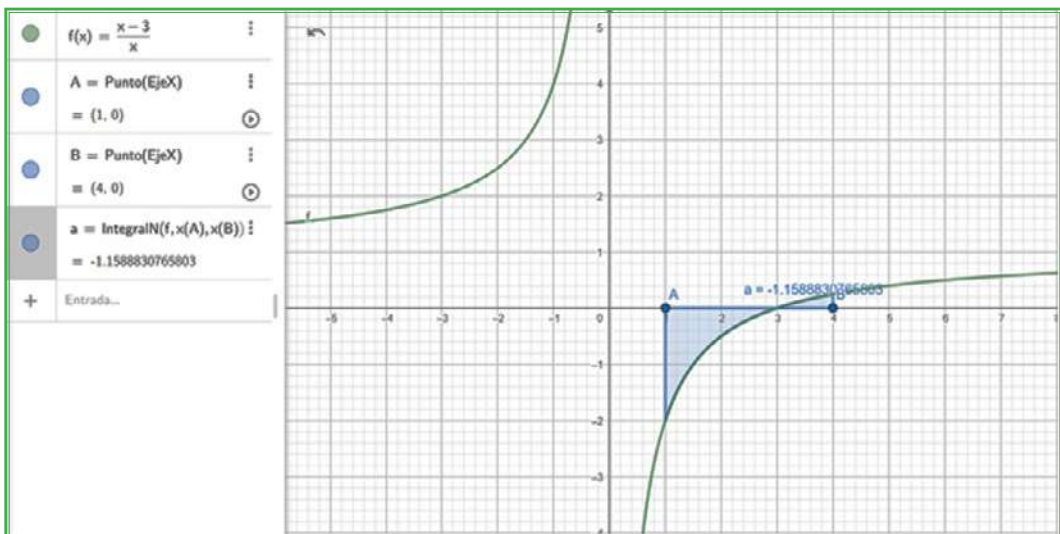
Fuente: Quora, 2020

2.3. EJERCICIOS DE INTEGRALES DEFINIDAS

$$\begin{aligned}
 2.3.1. \quad \int_1^4 \frac{x-3}{x} dx &= \int_1^4 \left(1 - \frac{3}{x}\right) dx \\
 &= \int_1^4 dx - \int_1^4 \frac{3}{x} dx \\
 &= \int_1^4 dx - 3 \cdot \int_1^4 \frac{dx}{x} \\
 &= x - 3 \ln|x| \Big|_1^4 \\
 &= 4 - 3 \ln|4| - (1 - 3 \ln|1|) \\
 &= 4 - 3 \ln|4| - 1 + 3 \ln|1| \\
 &= 3 - 3 \ln|4| + 3 \ln|1| \\
 &= 3 - 3 \ln|4| \\
 &= -1,158 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.4. Gráfica de la integral



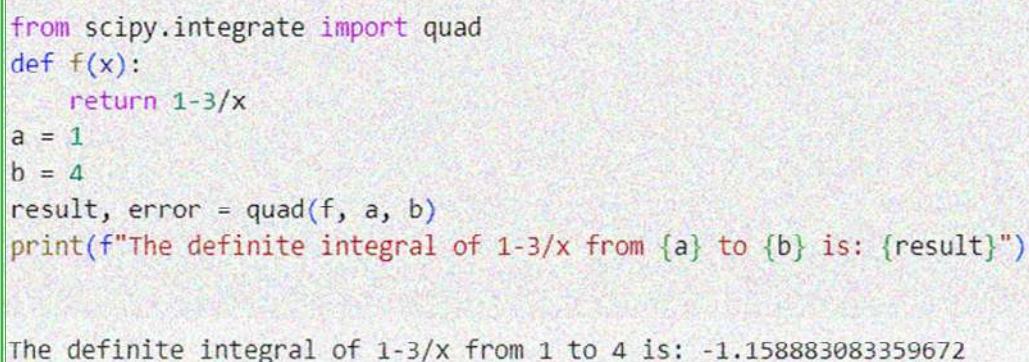
PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy.integrate import quad
def f(x):
    return 1-3/x
a = 1
b = 4
result, error = quad(f, a, b)
print(f"The definite integral of 1-3/x from {a} to {b} is: {result}")

```

Figura 2.5. Análisis 1



```

from scipy.integrate import quad
def f(x):
    return 1-3/x
a = 1
b = 4
result, error = quad(f, a, b)
print(f"The definite integral of 1-3/x from {a} to {b} is: {result}")

```

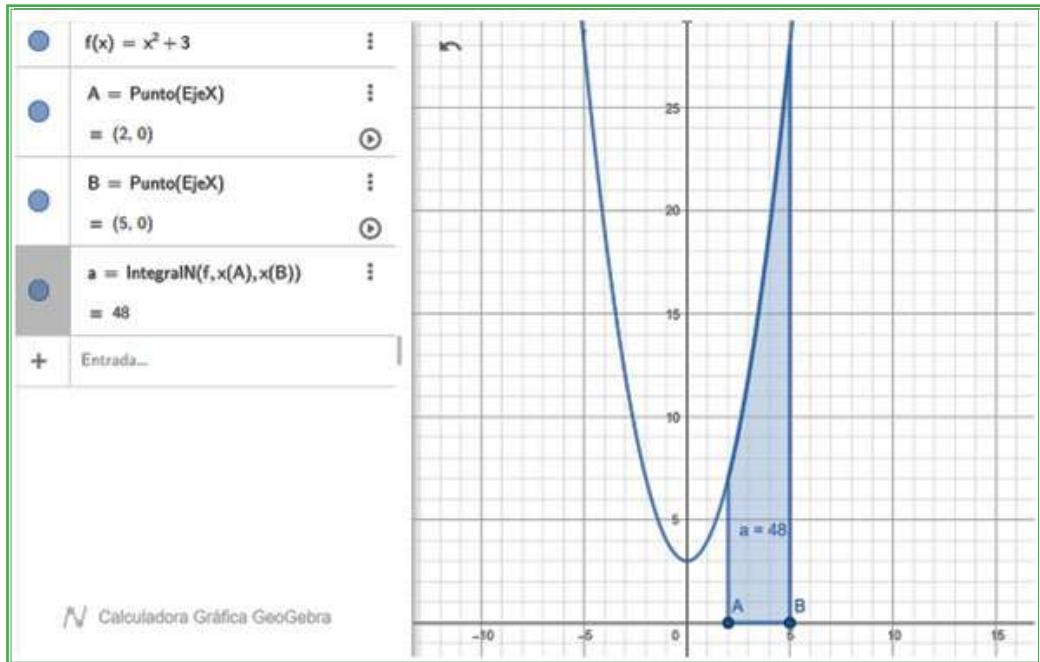
The definite integral of 1-3/x from 1 to 4 is: -1.158883083359672

2.3.2. $\int_2^5 (x^2 + 3) dx$

$$\begin{aligned}
 & \int x^2 dx + 3 \int dx \\
 &= \frac{x^3}{3} + 3x + C \\
 &= \frac{(5)^3}{3} + 3(5) - \left(\frac{(2)^3}{3} + 3(2) \right) \\
 &= \frac{225}{3} + 15 - \left(\frac{8}{3} + 6 \right) \\
 &= 48 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.6. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.integrate import quad

def f(x):
    # Define the function to integrate
    return x**2 + 3

# Example usage
a = 2
b = 5

result, error = quad(f, a, b)

print("The definite integral of x^2 + 3 from 0 to 2 is:", result)
```

Figura 2.7. Análisis 2

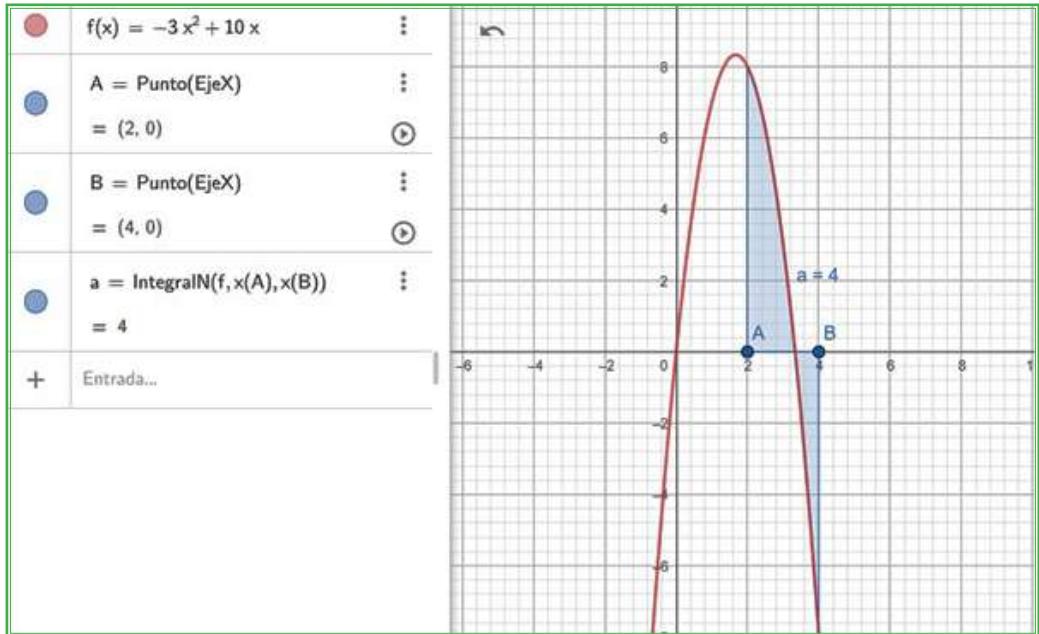
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
def f(x):
    # Define the function to integrate
    return x**2 + 3
# Example usage
a = 2
b = 5
result, error = quad(f, a, b)
print("The definite integral of x^2 + 3 from 0 to 2 is:", result)

The definite integral of x^2 + 3 from 0 to 2 is: 48.0
```

$$2.3.3. \int_2^4 (-3x^2 + 10x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(-\frac{3x^3}{3} + \frac{10x^2}{2} \right) \Big|_2^4 \\
 &= -x^3 + 5x^2 \Big|_2^4 \\
 &= (-4^3 + 5(4)^2) - (-2)^3 + 5(2)^2 \\
 &= (-64 + 5(16)) - (-8 + 5(4)) \\
 &= (-64 + 80) - (-8 + 20) \\
 &= (16) - (12) \\
 &= 4 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.8. Gráfica de la integral

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from sympy import symbols, integrate

# Definir la variable simbólica
x = symbols('x')

# Definir la función a integrar
funcion = -3*x**2 + 10*x

# Definir los límites de integración
limite_inferior = 2
limite_superior = 4

# Calcular la integral definida
resultado = integrate(funcion, (x, limite_inferior, limite_superior))

# Imprimir el resultado
print («El resultado de la integral definida es:»», resultado)

```

Figura 2.9. Análisis 3

```

from sympy import symbols, integrate
# Definir la variable simbólica
x = symbols('x')
# Definir la función a integrar
funcion = -3*x**2 + 10*x
# Definir los límites de integración
limite_inferior = 2
limite_superior = 4
# Calcular la integral definida
resultado = integrate(funcion, (x, limite_inferior, limite_superior))
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral definida es:", resultado)

El resultado de la integral definida es: 4

```

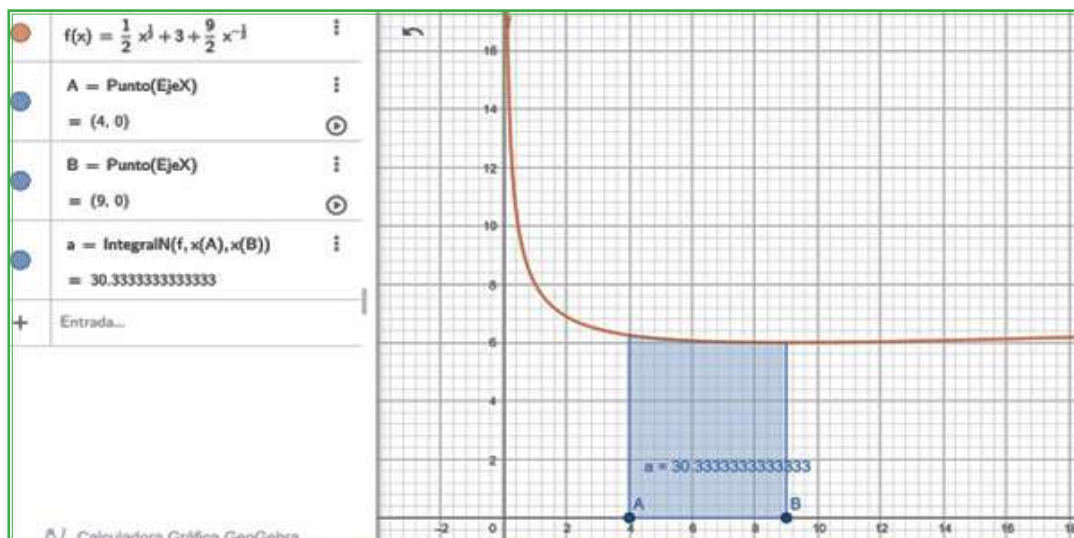
2.3.4. $\int_4^9 \frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{2\sqrt{x}} dx$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x})(3) + (3)^2}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{x + 6\sqrt{x} + 9}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{6\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} + \frac{9}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{x}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{6}{2} + \frac{9}{2x^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} + 3 + \frac{9x^{-\frac{1}{2}}}{2} \\
 &= \int_4^9 \frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{2\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_4^9 \left(\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} + 3 + \frac{9}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3x + \frac{9}{2} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Bigg|_4^9 \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 3x + \frac{9}{2} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1} \right) \Bigg|_4^9 \\
&= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + 3x + 9x^{\frac{1}{2}} \right) \Bigg|_4^9 \\
&= x^{\frac{m}{n}} \\
&= \sqrt[n]{x^m} \\
&= x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3} = \sqrt{x^2 x} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} \\
&= x\sqrt{x} \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + 3x + 9x^{\frac{1}{2}} \Bigg|_4^9 \\
&= \frac{x\sqrt{x}}{3} + 3x + 9\sqrt{x} \Bigg|_4^9 \\
&= \left[\frac{9\sqrt{9}}{3} + 3(9) + 9\sqrt{9} \right] - \left[\frac{4\sqrt{4}}{3} + 3(4) + 9\sqrt{4} \right] \\
&= [9 + 27 + 27] - \left[\frac{8}{3} + 12 + 18 \right] \\
&= \frac{91}{3} \\
&= 30,33 \text{ u}^2
\end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.10. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy.integrate import quad

import numpy as np

# Definir la función a integrar
def funcion(x):
    return ((np.sqrt(x) ) + 3)**2 / (2 * np.sqrt(x))

# Definir los límites de integración
a = 4 # Límite inferior
b = 9 # Límite superior

# Calcular la integral
resultado, error = quad(funcion, a, b)

# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

```

Figura 2.11. Análisis 4

```

from scipy.integrate import quad
import numpy as np
# Definir la función a integrar
def funcion(x):
    return ((np.sqrt(x) ) + 3)**2 / (2 * np.sqrt(x))
# Definir los límites de integración
a = 4 # Límite inferior
b = 9 # Límite superior
# Calcular la integral
resultado, error = quad(funcion, a, b)
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

El resultado de la integral es: 30.333333333333336

```

$$\begin{aligned}
 2.3.5. \int_2^3 \frac{dx}{x - \sqrt{x}} &= \int_2^3 \frac{dx}{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}} \\
 &= \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \\
 u &= \sqrt{x} - 1 \\
 u &= x^{\frac{1}{2}} - 1 \\
 \frac{du}{dx} &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\
 \frac{du}{dx} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \\
 \frac{du}{dx} &= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \\
 \frac{du}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 du 2\sqrt{x} &= dx
 \end{aligned}$$

$$\text{Si } u = \sqrt{x} - 1 \quad \text{Límite superior} = 3$$

$$u = \sqrt{3} - 1$$

$$\text{Si } u = \sqrt{x} - 1 \quad \text{Límite inferior} = 2$$

$$u = \sqrt{2} - 1$$

Reconstrucción de integrales:

$$\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{du 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot u}$$

$$= 2 \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{1}{u} du$$

$$= 2 \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{3}-1} \ln|u|$$

$$= 2[\ln|u|]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{3}-1}$$

$$2[\ln|\sqrt{3}-1| - \ln|\sqrt{2}-1|]$$

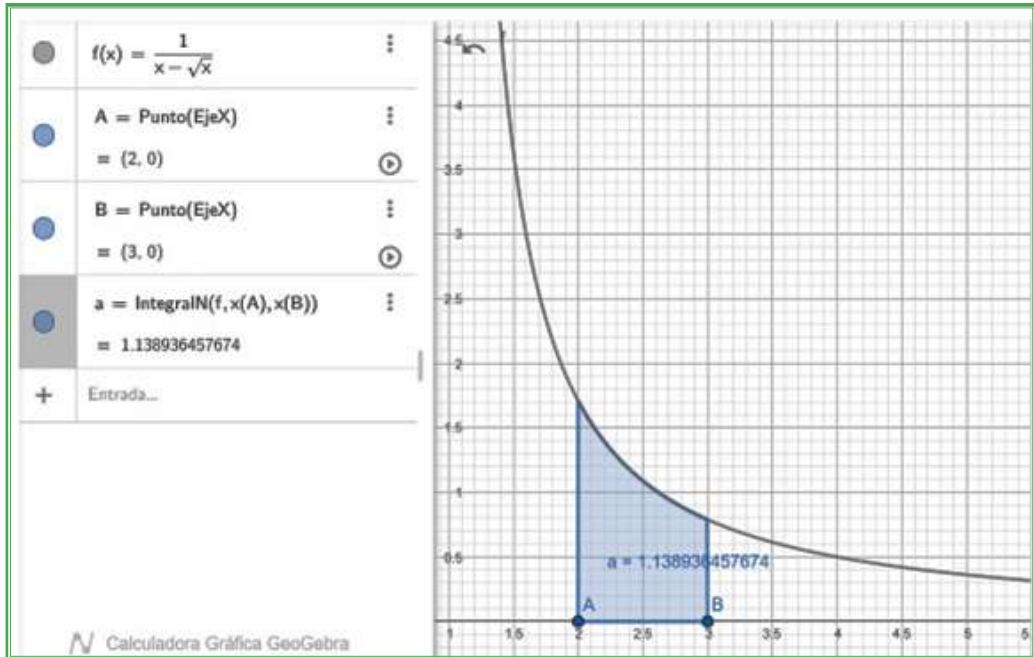
$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B \quad \ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B \text{ (Propiedad)}$$

$$2\ln \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^2 \text{PLnP}^Q = Q\ln P \text{ (Propiedad)}$$

$$= 1,139 \text{ u}^2 \text{u}^2$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.12. Gráfica de la integral

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy.integrate import quad

import numpy as np

# Definir la función a integrar
def funcion(x):
    return 1 / (x - np.sqrt(x))

# Definir los límites de integración
a = 2 # Límite inferior
b = 3 # Límite superior

# Calcular la integral
resultado, error = quad(funcion, a, b)

# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

```

Figura 2.13. Análisis 5

```

from scipy.integrate import quad
import numpy as np
# Definir la función a integrar
def funcion(x):
    return 1 / (x - np.sqrt(x))
# Definir los límites de integración
a = 2 # Límite inferior
b = 3 # Límite superior
# Calcular la integral
resultado, error = quad(funcion, a, b)
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

El resultado de la integral es: 1.1389364576742147

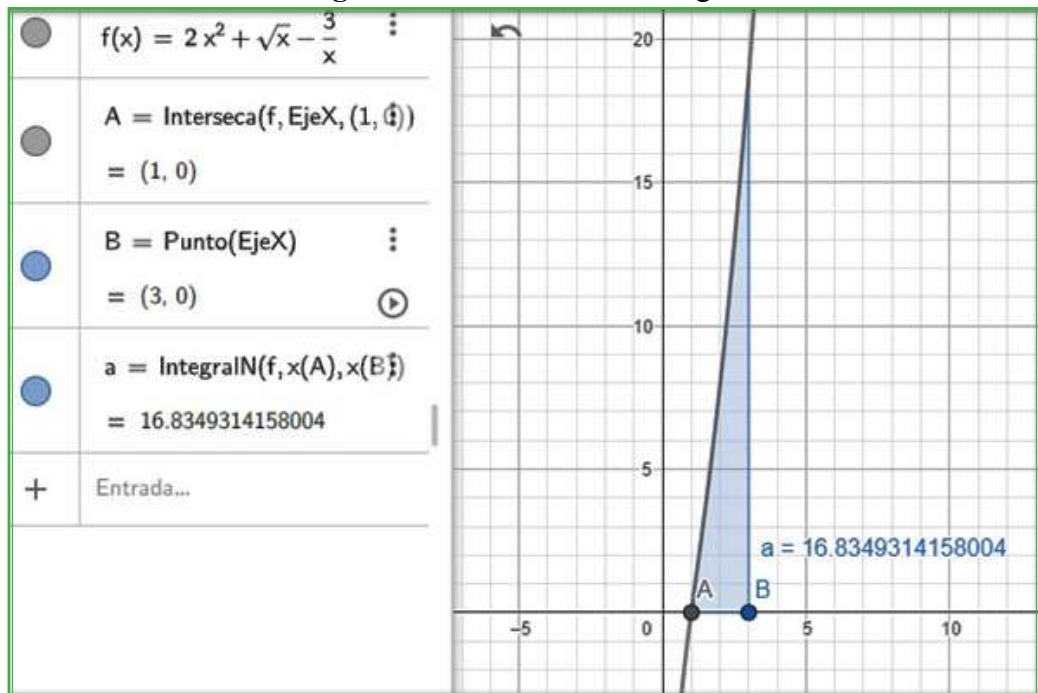
```

$$2.3.6. \int_1^3 \left(2x^2 + \sqrt{x} - \frac{3}{x} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^3 \left(2x^2 + x^{1/2} - \frac{3}{x} \right) dx \\
 &= \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^{2/3}}{3/2} - 3\ln(x) \Big|_1^3 \\
 &= \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3\ln(x) \Big|_1^3 \\
 &= \frac{2}{3}3^3 + \frac{2}{3}3\sqrt{3} - 3\ln(3) - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 3\ln(1) \right) \\
 &= \frac{50}{3} + 2\sqrt{3} - 3\ln(3) \\
 &= 16,83493 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.14. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy.integrate import quad

# Definir la función que se desea integrar
def f(x):
    return 2*x**(2) + x**(1/2) - 3/x

# Definir los límites de integración
a = 1
b = 3

# Calcular la integral definida
resultado, error = quad(f, a, b)

# Imprimir el resultado
print(resultado)

```

Figura 2.15. Análisis 6

```

from scipy.integrate import quad
# Definir la función que se desea integrar
def f(x):
    return 2*x**(2) + x**(1/2) - 3/x
# Definir los límites de integración
a = 1
b = 3
# Calcular la integral definida
resultado, error = quad(f, a, b)
# Imprimir el resultado
print(resultado)

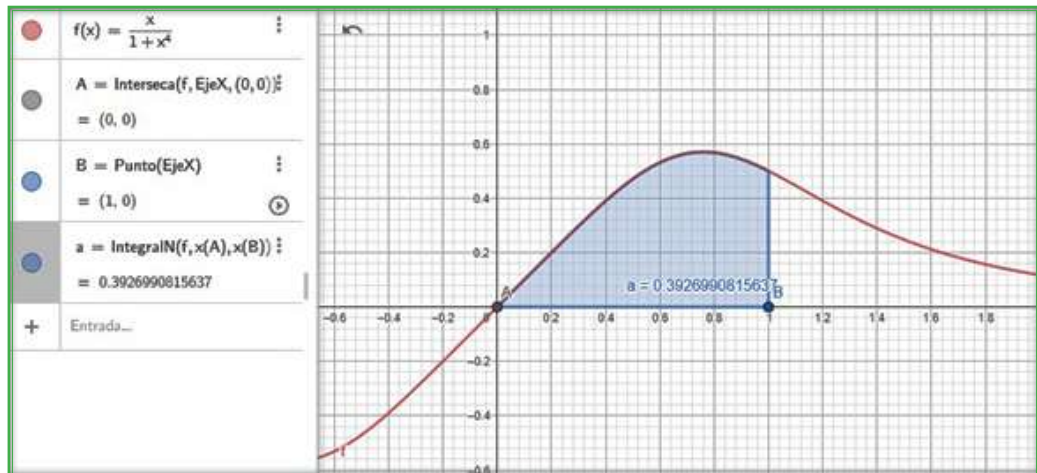
16.834931415800096

```

2.3.7. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{1+x^4} dx &= \left(\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(t) + C \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) + C \\
 &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(1)) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(0)) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0 \\
 &= \frac{\pi}{8} \\
 &= 0,392699 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Figura 2.16. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from sympy import symbols, integrate

# Definir la variable simbólica y la función
x = symbols('x')
f = (x) / (1 + x**4)

# Calcular la integral definida
resultado = integrate(f, (x, 0, 1))

# Imprimir el resultado
print(resultado)

```

Figura 2.17. Análisis 7

```

from sympy import symbols, integrate
# Definir la variable simbólica y la función
x = symbols('x')
f = (x) / (1 + x**4)
# Calcular la integral definida
resultado = integrate(f, (x, 0, 1))
# Imprimir el resultado
print(resultado)

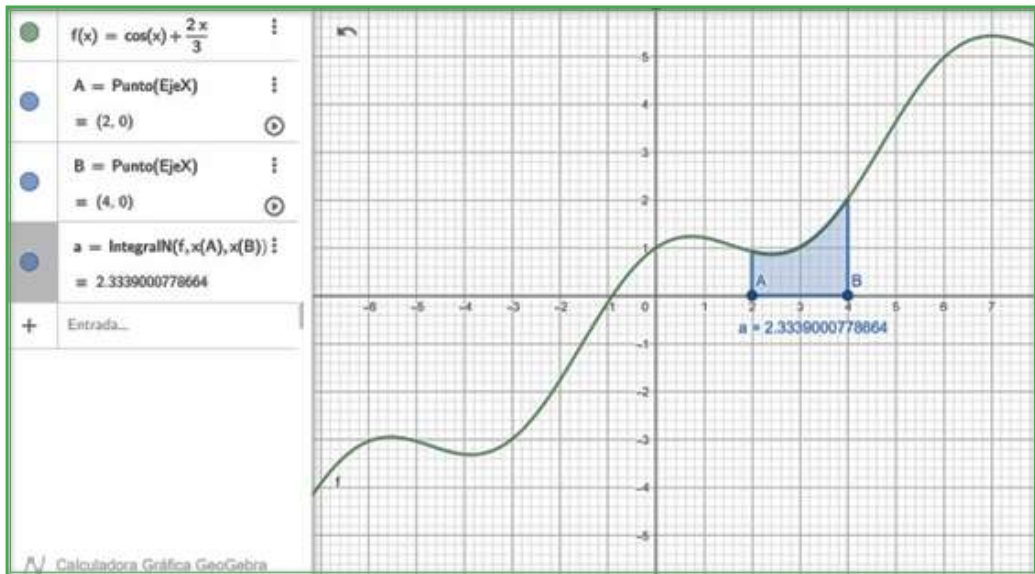
pi/8

```

$$\begin{aligned}
 2.3.8. \quad & \int_2^4 \cos x + \frac{2x}{3} dx \\
 & \int_2^4 \cos x \, dx + \frac{2}{3} \int_2^4 x \, dx \\
 & = \left(\sin x + \frac{2x^2}{6} \right) \Big|_2^4 \\
 & = \left[\sin(4) + \frac{(4)^2}{3} \right] - \left[\sin(2) + \frac{(2)^2}{3} \right] \\
 & = \sin(4) + \frac{16}{3} - \sin(2) - \frac{4}{3} \\
 & = 2,33 \, u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.18. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy import integrate

import math

# Definir la función a integrar
def funcion(x):
    return math.cos(x) + (2*x/3)

# Calcular la integral definida
resultado, error = integrate.quad(funcion, 2, 4)

# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

```

Figura 2.19. Análisis 8

```

from scipy import integrate
import math
# Definir la función a integrar
def funcion(x):
    return math.cos(x) + (2*x/3)
# Calcular la integral definida
resultado, error = integrate.quad(funcion, 2, 4)
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

El resultado de la integral es: 2.33390007786639

```

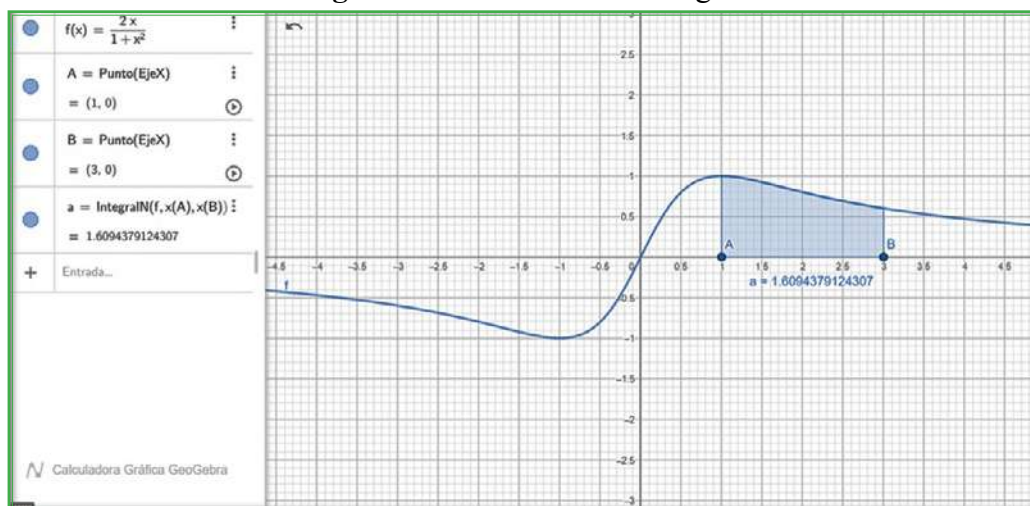
$$2.3.9. \int_1^3 \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_1^3 \frac{dt}{t}$$

Integral por sustitución:

$$\begin{aligned}
 t &= 1 + x^2 & &= \ln(t) \Big|_1^3 \\
 dt &= 2x \, dx & &= \ln(1 + x^2) \Big|_1^3 \\
 &= \ln(1 + 9) - \ln(1 + 1) \\
 &= 1,60 \, u^2
 \end{aligned}$$

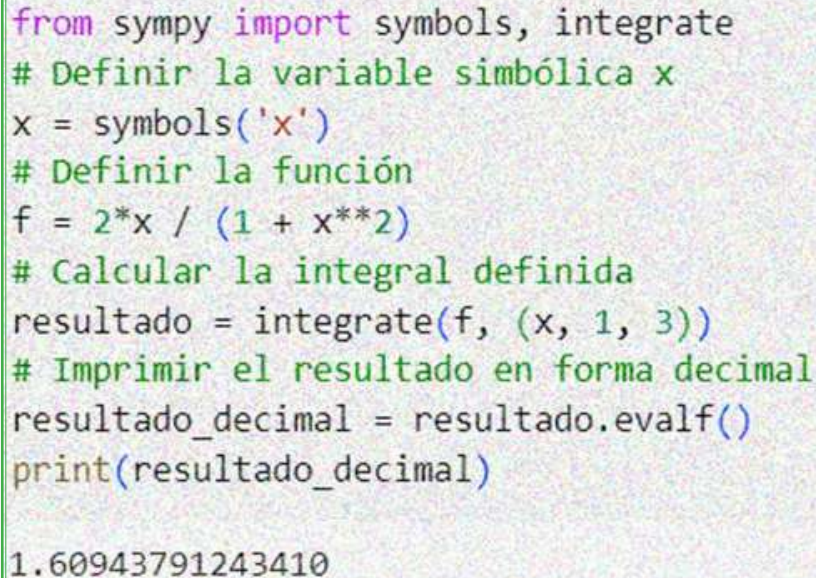
Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.20. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
from sympy import symbols, integrate
# Definir la variable simbólica x
x = symbols('x')
# Definir la función
f = 2*x / (1 + x**2)
# Calcular la integral definida
resultado = integrate(f, (x, 1, 3))
# Imprimir el resultado en forma decimal
resultado_decimal = resultado.evalf()
print(resultado_decimal)
```

Figura 2.21. Análisis 9

```
from sympy import symbols, integrate
# Definir la variable simbólica x
x = symbols('x')
# Definir la función
f = 2*x / (1 + x**2)
# Calcular la integral definida
resultado = integrate(f, (x, 1, 3))
# Imprimir el resultado en forma decimal
resultado_decimal = resultado.evalf()
print(resultado_decimal)

1.60943791243410
```

$$2.3.10. \int_{\frac{1}{2}}^1 1 + \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 1 + \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 1 + x^{-2} dx$$

$$= x - x^{-1} \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= [1 - 1^{-1}] - \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \right]$$

$$= [1 - 1] - \left[\frac{1}{2} - 2 \right]$$

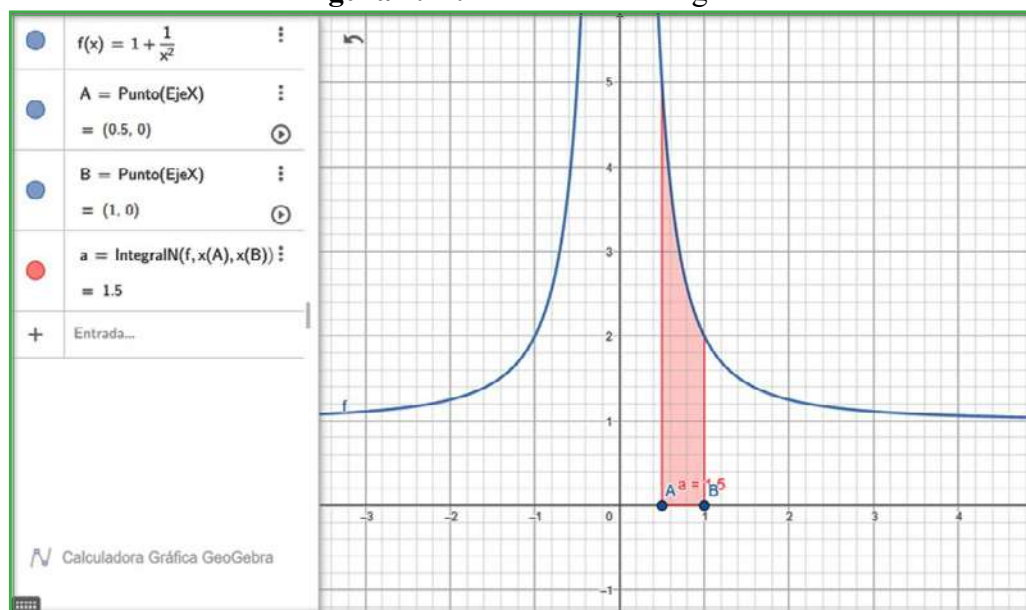
$$= - \left[\frac{1}{2} - 2 \right]$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$= 1,5u^2$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.22. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

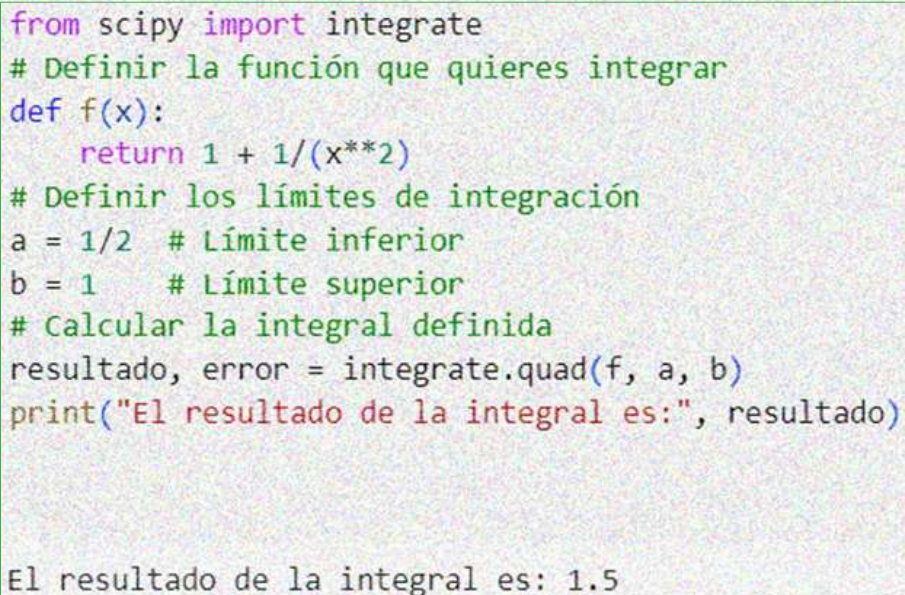
```
from scipy import integrate

# Definir la función que quieres integrar
def f(x):
    return 1 + 1/(x**2)

# Definir los límites de integración
a = 1/2 # Límite inferior
b = 1   # Límite superior

# Calcular la integral definida
resultado, error = integrate.quad(f, a, b)

print("El resultado de la integral es:", resultado)
```

Figura 2.23. Análisis 10

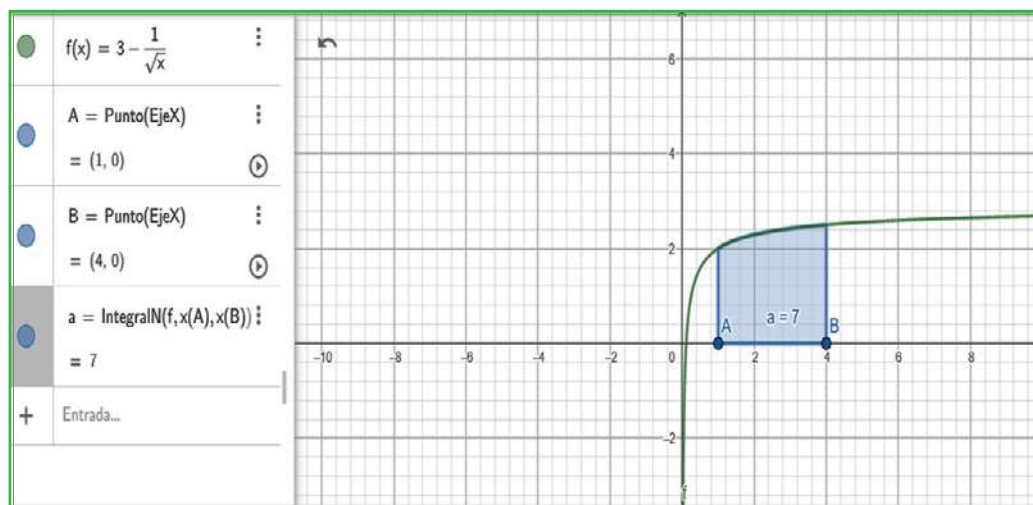
```
from scipy import integrate
# Definir la función que quieres integrar
def f(x):
    return 1 + 1/(x**2)
# Definir los límites de integración
a = 1/2 # Límite inferior
b = 1   # Límite superior
# Calcular la integral definida
resultado, error = integrate.quad(f, a, b)
print("El resultado de la integral es:", resultado)

El resultado de la integral es: 1.5
```

$$\begin{aligned}
 2.3.11. \quad & \int_1^4 3 - \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \\
 & \int_1^4 3 - \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \\
 & = \int_1^4 (3 - x^{-\frac{1}{2}}) \, dx \\
 & = 3x - 2x^{-\frac{1}{2}} \Big|_1^4 \\
 & = [3(4) - 2(4)^{\frac{1}{2}}] - [3(1) - 2(1)^{\frac{1}{2}}] \\
 & = [12 - 4] - [3 - 2] \\
 & = 8 - 1 \\
 & = 7 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.24. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
def f(x):  
    return 3 - 1 / (x**0.5)  
  
def rectangle_rule(f, a, b, n):  
    h = (b - a) / n  
    integral = 0  
    for i in range(n):  
        x = a + (i + 0.5) * h  
        integral += f(x)  
    integral *= h  
    return integral  
  
a = 1  
b = 4  
  
n = 1000 # Puedes ajustar este valor para obtener mayor precisión  
result = rectangle_rule(f, a, b, n)  
print(result)
```

Figura 2.25. Análisis 11

```

def f(x):
    return 3 - 1 / (x**0.5)
def rectangle_rule(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    integral = 0
    for i in range(n):
        x = a + (i + 0.5) * h
        integral += f(x)
    integral *= h
    return integral
a = 1
b = 4
n = 1000 # Puedes ajustar este valor para obtener mayor precisión
result = rectangle_rule(f, a, b, n)
print(result)

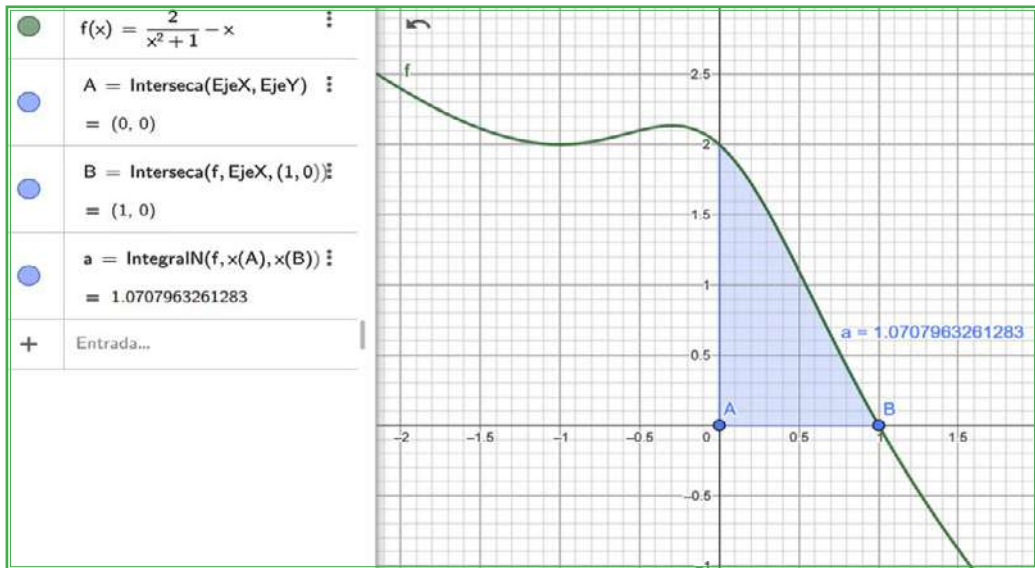
7.00000016406232

```

$$\begin{aligned}
 2.3.12. \quad & \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2 + 1} - x \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2 + 1} \right) dx - \int_0^1 (x) dx \\
 &= 2 \int_0^1 \left(\frac{dx}{x^2 + 1} \right) - \int_0^1 (x) dx \\
 &= 2 \tan^{-1}(x) - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \\
 &= 2 [\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)] - \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] - \frac{1}{2} \\
 &= 2 * \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\pi - 1}{2} \\
 &= 1,0708 u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.26. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

Definir la función que se va a integrar

def f(x):

 return 2/(x**2 + 1) - x

Defini los límites de integración

a = 0 # Límite inferior

b = 1 # Límite superior

Definir el número de subintervalos para la aproximación

n = 1000

Calcular el ancho de cada subintervalo

h = (b - a) / n

Inicializar la suma de los valores de la función

suma = 0

Calcular la suma de los valores de la función en los puntos interiores de los subintervalos

```
for i in range(1, n):
```

```
    x = a + i * h
```

```
    suma += f(x)
```

Calcular la aproximación de la integral usando la regla del trapecio

```
resultado = h * (f(a) + f(b) + 2 * suma) / 2
```

Imprimir el resultado

```
print("El resultado de la integral es:", resultado)
```

Figura 2.27. Análisis 12

```
# Definir la función que se va a integrar
def f(x):
    return 2/(x**2 + 1) - x
# Definir los límites de integración
a = 0 # Límite inferior
b = 1 # Límite superior
# Definir el número de subintervalos para la aproximación
n = 1000
# Calcular el ancho de cada subintervalo
h = (b - a) / n
# Inicializar la suma de los valores de la función
suma = 0
# Calcular la suma de los valores de la función en los puntos interiores de los subintervalos
for i in range(1, n):
    x = a + i * h
    suma += f(x)
# Calcular la aproximación de la integral usando la regla del trapecio
resultado = h * (f(a) + f(b) + 2 * suma) / 2
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

El resultado de la integral es: 1.0707962434615637
```

2.3.13. $\int_0^1 (x^3 + 2x^2 + 2) dx$

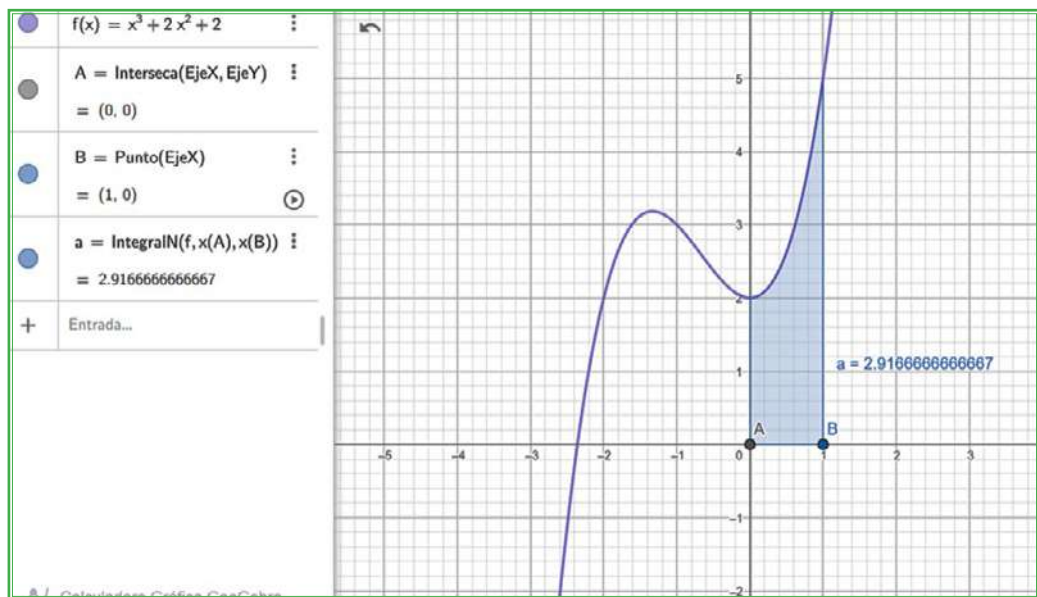
$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 2x^2 dx + \int_0^1 2 dx$$

$$= \int_0^1 x^3 dx + 2 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 dx$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1^4}{4} + 2 \frac{1^3}{3} + 2(1) - \left(\frac{0^4}{4} + 2 \frac{0^3}{3} + 2(0) \right) \\
 &= \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{3} + 2 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 2 \\
 &= \frac{35}{12} \\
 &= 2,916 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.28. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
from scipy import integrate
```

```
def integrand(x):
```

```

return x**3 + 2*x**2 + 2

result, error = integrate.quad(integrand, 0, 1)

print("El resultado de la integral es:", result)
    
```

Figura 2.29. Análisis 13

```

from scipy import integrate
def integrand(x):
    return x**3 + 2*x**2 + 2
result, error = integrate.quad(integrand, 0, 1)
print("El resultado de la integral es:", result)

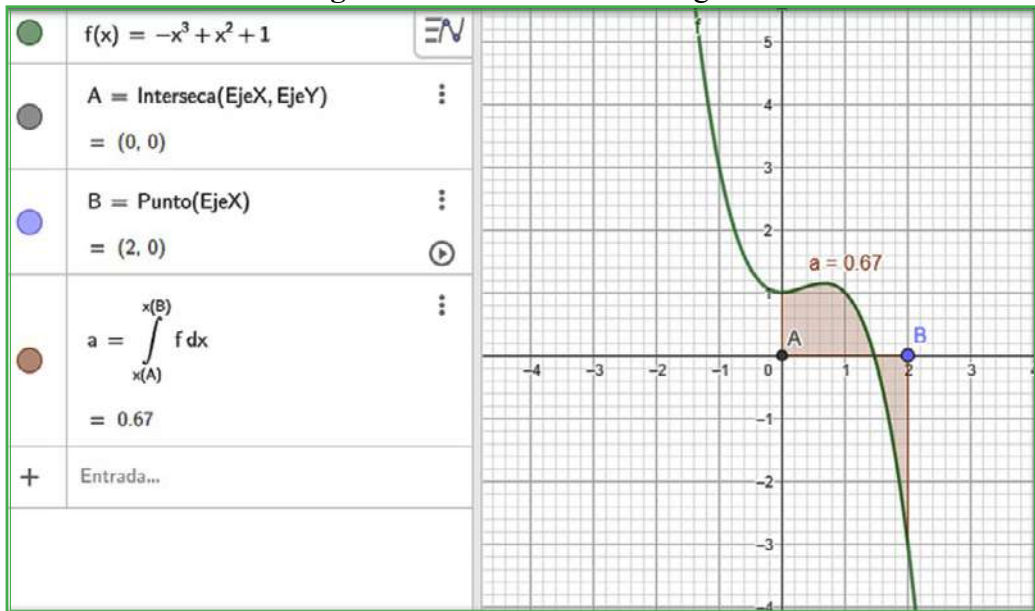
El resultado de la integral es: 2.9166666666666665
    
```

2.3.14. $\int_0^2 (-x^3 + x^2 + 1) dx$

$$\begin{aligned}
 &= -\int_0^2 x^3 dx + \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 1 dx \\
 &= \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 \\
 &= -\frac{(2)^4}{4} + \frac{(2)^3}{3} + 2 \\
 &= -\frac{16}{4} + \frac{8}{3} + 2 \\
 &= -4 + \frac{8}{3} + 2 \\
 &= -2 + \frac{8}{3} \\
 &= \frac{-6 + 8}{3} = \frac{2}{3} \\
 &= 0,67 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.30. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

Definir la función que se va a integrar

def f(x):

 return (-x**3+x**2+1)

Definir los límites de integración

a = 0 # Límite inferior

b = 2 # Límite superior

Definir el número de intervalos

n = 100 # Cuanto mayor sea n, mayor será la precisión

Calcular el ancho del intervalo

h = (b - a) / n

Inicializar la suma de los valores de la función

suma = 0

```

# Calcular la suma de los valores de la función

for i in range(1, n):

    x = a + i * h

    suma += f(x)

# Calcular la aproximación de la integral definida

integral = (h / 2) * (f(a) + 2 * suma + f(b))

# Imprimir el resultado

print("El valor de la integral definida es:", integral)

```

Figura 2.31. Análisis 14

```

# Definir la función que se va a integrar
def f(x):
    return (-x**3+x**2+1)
# Definir los límites de integración
a = 0 # Límite inferior
b = 2 # Límite superior
# Definir el número de intervalos
n = 100 # Cuanto mayor sea n, mayor será la precisión
# Calcular el ancho del intervalo
h = (b - a) / n
# Inicializar la suma de los valores de la función
suma = 0
# Calcular la suma de los valores de la función
for i in range(1, n):
    x = a + i * h
    suma += f(x)
# Calcular la aproximación de la integral definida
integral = (h / 2) * (f(a) + 2 * suma + f(b))
# Imprimir el resultado
print("El valor de la integral definida es:", integral)

El valor de la integral definida es: 0.6663999999999999

```

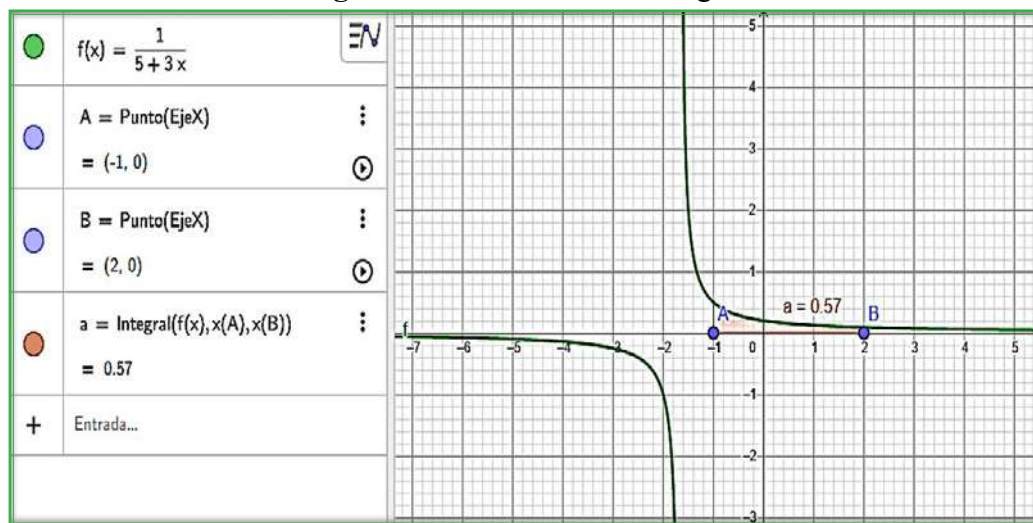
$$\begin{aligned}
 \text{2.3.15. } & \int_{-1}^2 \frac{1}{5+3x} dx \\
 & t = 5 + 3x \\
 & t = 3 \\
 & dx = \frac{1}{3} dt
 \end{aligned}$$

Sustituimos en la ecuación original

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3} dt \\
 & = \int_{-1}^2 \frac{1}{3t} dt \\
 & = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \frac{1}{t} dt \\
 & \left. \frac{\ln(t)}{3} \right|_{-1}^2 = \left. \frac{\ln(5+3x)}{3} \right|_{-1}^2 \\
 & = \frac{\ln(5+3(2))}{3} - \frac{\ln(5+3(-1))}{3} \\
 & = \frac{\ln(5+6)}{3} - \frac{\ln(5-3)}{3} \\
 & = \frac{\ln(11)}{3} - \frac{\ln(2)}{3} \\
 & = \ln\left(11^{\frac{1}{3}}\right) + \ln\left(2^{-\frac{1}{3}}\right) \\
 & = \ln\left(11^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\right) \\
 & = \ln\left(\frac{11^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}\right) \\
 & = \ln\left(\left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \\
 & = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{11}{2}\right) \\
 & = 0,57u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.32. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

Definir la función a integrar

def f(x):

 return 1 / (5 + 3*x)

Definir los límites de integración

limite_inferior = -1

limite_superior = 2

Definir el número de subintervalos para aproximar la integral

num_subintervalos = 1000

Calcular el ancho de cada subintervalo

ancho_subintervalo = (limite_superior - limite_inferior) / num_subintervalos

Inicializar la suma de los valores de la función en los extremos

suma = f(limite_inferior) + f(limite_superior)

Calcular la suma de los valores de la función en los puntos interiores

```

for i in range(1, num_subintervalos):
    x = limite_inferior + i * ancho_subintervalo
    suma += 2 * f(x)

# Calcular la aproximación de la integral
resultado = (ancho_subintervalo / 2) * suma

# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral definida es:", resultado)

```

Figura 2.33. Análisis 15

```

# Definir la función a integrar
def f(x):
    return 1 / (5 + 3*x)
# Definir los límites de integración
limite_inferior = -1
limite_superior = 2
# Definir el número de subintervalos para aproximar la integral
num_subintervalos = 1000
# Calcular el ancho de cada subintervalo
ancho_subintervalo = (limite_superior - limite_inferior) / num_subintervalos
# Inicializar la suma de los valores de la función en los extremos
suma = f(limite_inferior) + f(limite_superior)
# Calcular la suma de los valores de la función en los puntos interiores
for i in range(1, num_subintervalos):
    x = limite_inferior + i * ancho_subintervalo
    suma += 2 * f(x)
# Calcular la aproximación de la integral
resultado = (ancho_subintervalo / 2) * suma
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral definida es:", resultado)

El resultado de la integral definida es: 0.5682499079832959

```

$$2.3.16. \int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} dx$$

Cambio de variable:

$$\begin{aligned} z &= x^2 - 2 \\ dz &= 2x \, dx \\ dx &= \frac{dz}{2x} \end{aligned}$$

Reemplazo:

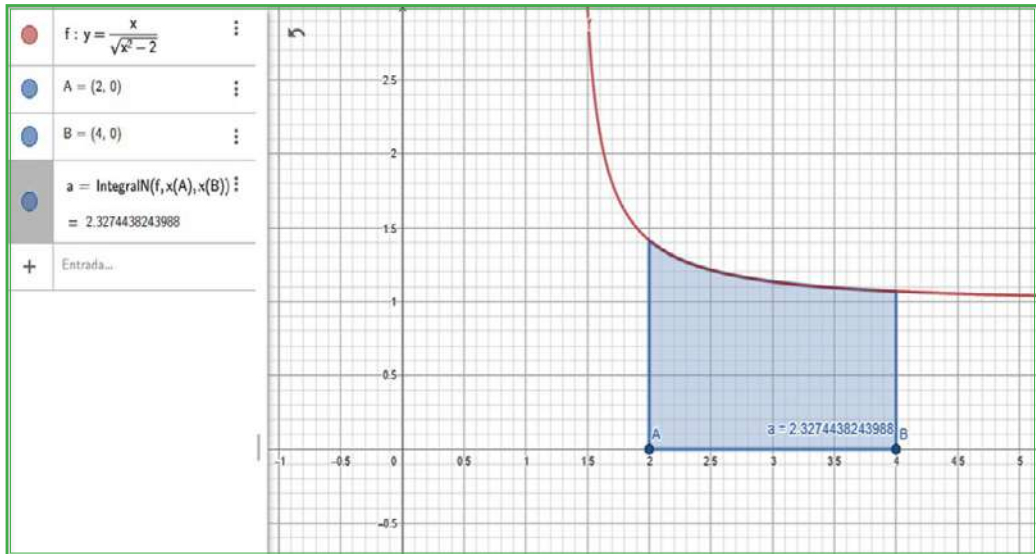
$$\begin{aligned} &\int_2^4 \frac{x}{\sqrt{z}} * \frac{dz}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &= \frac{1}{2} * \int_2^4 \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} * \int_2^4 z^{-\left(\frac{1}{2}\right)+1} dz \\ &= \left(\frac{1}{2} * \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_2^4 \\ &= \left(z^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_2^4 \\ &= \sqrt{x^2 - 2} \Big|_2^4 \end{aligned}$$

Evalúamos:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{4^2 - 2} - \sqrt{2^2 - 2} \\ &= \sqrt{14} - \sqrt{2} \\ &= 2.327443824 \, u^2 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.34. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy import integrate

import numpy as np

# Definir la función a integrar
def f(x):
    return x / np.sqrt(x**2 - 2)

# Calcular la integral definida
result, error = integrate.quad(f, 2, 4)

# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", result)

```

Figura 2.35. Análisis 16

```

from scipy import integrate
import numpy as np
# Definir la función a integrar
def f(x):
    return x / np.sqrt(x**2 - 2)
# Calcular la integral definida
result, error = integrate.quad(f, 2, 4)
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", result)

El resultado de la integral es: 2.3274438244008464

```

$$2.3.17. \int_1^3 (\cos(x) + \sqrt{1+7x}) \, dx$$

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 \cos(x) \, dx + \int_1^3 \sqrt{1+7x} \, dx \\
 &= (\sin(x)) \Big|_1^3 + \int_1^3 \sqrt{1+7x} \, dx
 \end{aligned}$$

Cambio de variable:

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 \sqrt{1+7x} \, dx \\
 & z = 1 + 7x \\
 & dz = 7 \, dx \\
 & dx = \frac{dz}{7}
 \end{aligned}$$

Reemplazo:

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 (z)^{\frac{1}{2}} * \frac{dz}{7} \\
 &= \frac{1}{7} * \int_1^3 (z)^{\frac{1}{2}+1} dz \\
 &= \left(\frac{2}{21} * z^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{2}{21} * z^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^3
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{21} * \sqrt[3]{(1+7x)^3} \Big|_1^3$$

Tenemos:

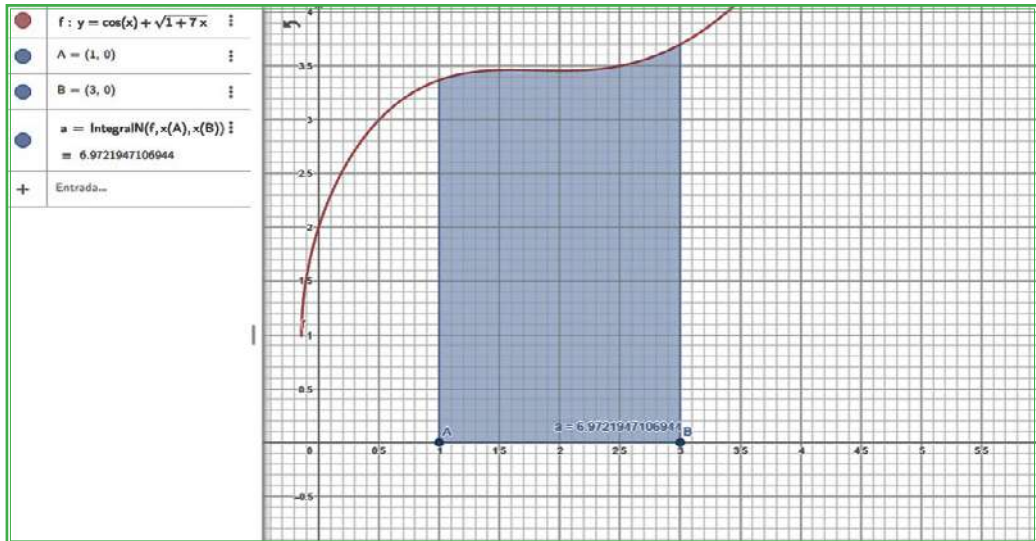
$$= \left(\sin(x) + \frac{2}{21} * \sqrt[3]{(1+7x)^3} \right) \Big|_1^3$$

$$= \left(\sin(3) + \frac{2}{21} * \sqrt[3]{(1+7*3)^3} \right) - \left(\sin(1) + \frac{2}{21} * \sqrt[3]{(1+7*1)^3} \right)$$

$$= 6.972194711 \text{ u}^2$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.36. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
from scipy.integrate import quad
from math import cos, sqrt
def f(x):
    return cos(x) + sqrt(1 + 7*x)
result, error = quad(f, 1, 3)
print("El valor numérico de la integral es:", result)
```

Figura 2.37. Análisis 17

```

from scipy.integrate import quad
from math import cos, sqrt
def f(x):
    return cos(x) + sqrt(1 + 7*x)
result, error = quad(f, 1, 3)
print("El valor numérico de la integral es:", result)

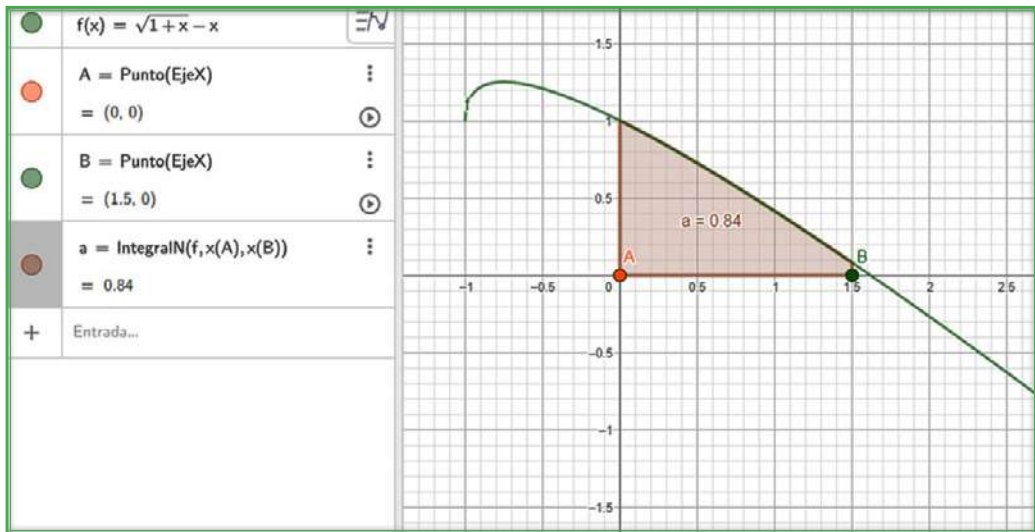
```

El valor numérico de la integral es: 6.972194710694439

$$2.3.18. \int_0^{1.5} (\sqrt{1+x} - x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{1.5} \left((1+x)^{\frac{1}{2}} - x \right) dx \\
 &= \left(\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1.5} \\
 &= \left(\frac{2(1+x)\sqrt{1+x}}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1.5} \\
 &= \left(\frac{2(1+(1.5))\sqrt{1+(1.5)}}{3} - \frac{(1.5)^2}{2} \right) - \left(\frac{2\sqrt{1}}{3} \right) \\
 &= 1,510 - 0,667 \\
 &= 0,843 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.38. Gráfica de la integral

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
# Definir la función a integrar
def integrand(x):
    return (1 + x) ** 0.5 - x

# Definir los límites de integración
a = 0
b = 1.5

# Definir el número de intervalos para aproximar la integral
n = 1000

# Calcular la anchura de cada intervalo
h = (b - a) / n

# Inicializar la suma de los valores de la función
sum_val = 0

# Calcular la suma de los valores de la función evaluados en los puntos inter-
medios de los intervalos
```

```

for i in range(1, n):

    x = a + i * h

    sum_val += integrand(x)

# Calcular la aproximación de la integral utilizando el método del trapecio
approximation = h * (0,5 * (integrand(a) + integrand(b)) + sum_val)

# Imprimir el resultado

print("El valor aproximado de la integral es:", approximation)

```

Figura 2.39. Análisis 19

```

# Definir la función a integrar
def integrand(x):
    return (1 + x) ** 0.5 - x
# Definir los límites de integración
a = 0
b = 1.5
# Definir el número de intervalos para aproximar la integral
n = 1000
# Calcular la anchura de cada intervalo
h = (b - a) / n
# Inicializar la suma de los valores de la función
sum_val = 0
# Calcular la suma de los valores de la función evaluados en los puntos intermedios de los intervalos
for i in range(1, n):
    x = a + i * h
    sum_val += integrand(x)
# Calcular la aproximación de la integral utilizando el método del trapecio
approximation = h * (0.5 * (integrand(a) + integrand(b)) + sum_val)
# Imprimir el resultado
print("El valor aproximado de la integral es:", approximation)

El valor aproximado de la integral es: 0.8435646823496903

```

$$2.3.19. \int_3^4 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) dx$$

$$u(x) = x^2 - 1$$

$$du = 2x dx$$

$$x dx = \frac{1}{2} du$$

$$x \Rightarrow u = 3^2 - 1 = 8$$

$$x \Rightarrow u = 4^2 - 1 = 15$$

$$\int_3^4 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right) dx = \int_8^{15} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_8^{15} u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$\int_3^4 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_8^{15}$$

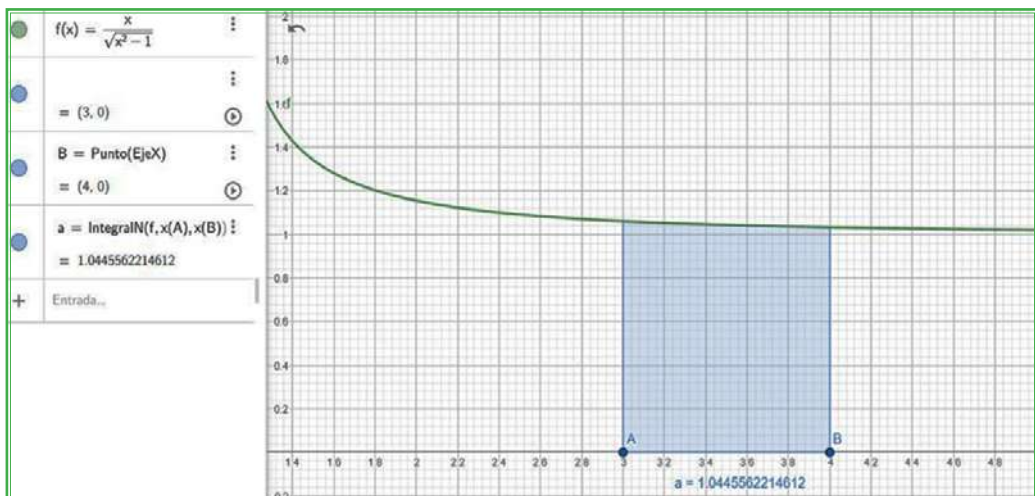
$$= \frac{1}{2} (2)(\sqrt{15} - \sqrt{8})$$

$$= \sqrt{15} - \sqrt{8}$$

$$= 1,044 \text{ u}^2$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.40. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
from scipy import integrate

import numpy as np

# Definir la función

def f(x):

    return x / np.sqrt(x**2 - 1)

# Calcular la integral definida
```

```
integral, error = integrate.quad(f, 3, 4)
```

```
# Imprimir el resultado
```

```
print(integral)
```

Figura 2.41. Análisis 21

```
from scipy import integrate
import numpy as np
# Definir la función
def f(x):
    return x / np.sqrt(x**2 - 1)
# Calcular la integral definida
integral, error = integrate.quad(f, 3, 4)
# Imprimir el resultado
print(integral)

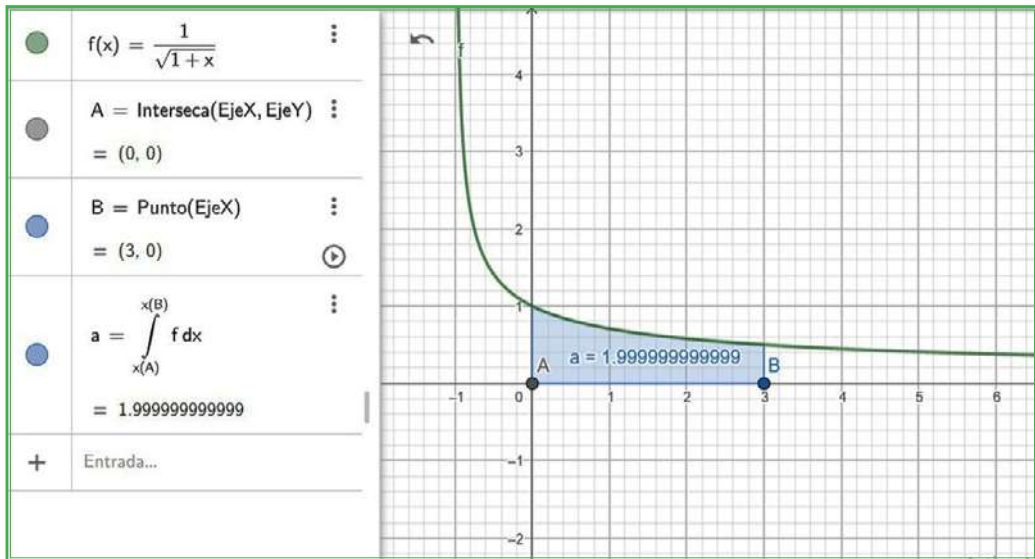
1.0445562214612267
```

2.3.20. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \\
 &= \int_0^3 (1+x)^{-1/2} \\
 &= \frac{(1+x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^3 \\
 &= 2\sqrt{1+x} \Big|_0^3 \\
 &= \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \\
 &= 2[\sqrt{3+1} - \sqrt{0+1}] \\
 &= 2[\sqrt{4} - \sqrt{1}] \\
 &= 2u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.42. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import sympy as sp

# Definición de la variable simbólica
x = sp.symbols('x')

# Definición de la función integrando
f = 1 / sp.sqrt(1 + x)

# Cálculo de la integral definida
integral = sp.integrate(f, (x, 0, 3))

# Imprimir el resultado
print("El valor de la integral es:", integral)
```

Figura 2.43. Análisis 22

```

import sympy as sp
# Definición de la variable simbólica
x = sp.symbols('x')
# Definición de la función integrando
f = 1 / sp.sqrt(1 + x)
# Cálculo de la integral definida
integral = sp.integrate(f, (x, 0, 3))
# Imprimir el resultado
print("El valor de la integrales:", integral)

El valor de la integrales: 2

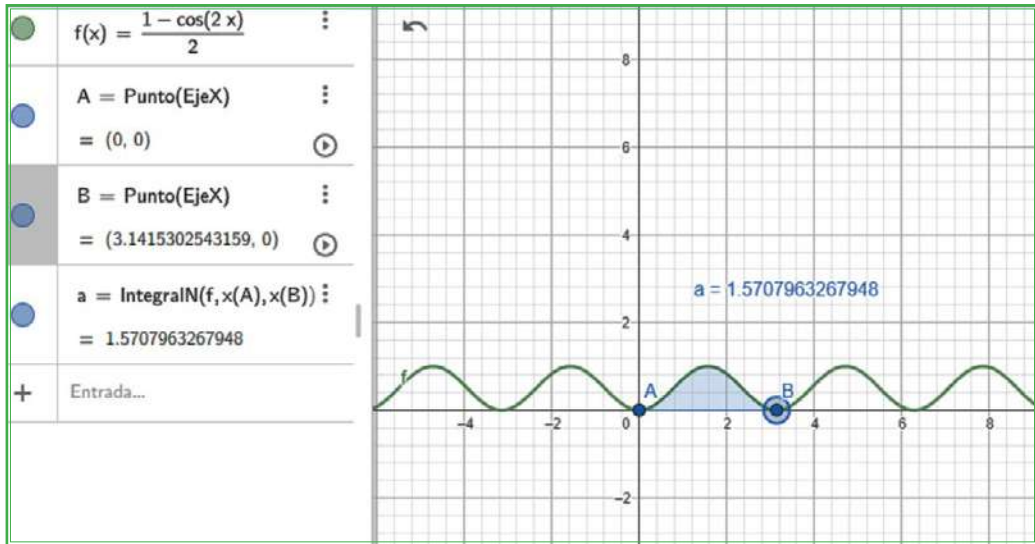
```

$$2.3.21. \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} dx - \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{2} dx \\
 &= \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2} (\pi - 0) - \frac{1}{4} (\sin 2\pi - \sin 0) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} (0 - 0) \\
 &= \frac{\pi}{2} \\
 &= 1,5707 u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.44. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import math

# Definir la función a integrar

def integrand(x):

    return (1 - math.cos(2 * x)) / 2

# Definir los límites de integración

a = 0

b = math.pi

# Definir el número de intervalos para aproximar la integral

n = 1000

# Calcular la anchura de cada intervalo

h = (b - a) / n

# Inicializar la suma de los valores de la función

sum_val = 0
```

Calcular la suma de los valores de la función evaluados en los puntos intermedios de los intervalos

```
for i in range(1, n):
```

```
    x = a + i * h
```

```
    sum_val += integrand(x)
```

Calcular la aproximación de la integral utilizando el método del trapecio

```
approximation = h * (0.5 * (integrand(a) + integrand(b)) + sum_val)
```

Imprimir el resultado

```
print("El valor aproximado de la integral es:", approximation)
```

Figura 2.45. Análisis 23

```
import math
# Definir la función a integrar
def integrand(x):
    return (1 - math.cos(2 * x)) / 2
# Definir los límites de integración
a = 0
b = math.pi
# Definir el número de intervalos para aproximar la integral
n = 1000
# Calcular la anchura de cada intervalo
h = (b - a) / n
# Inicializar la suma de los valores de la función
sum_val = 0
# Calcular la suma de los valores de la función evaluados en los puntos intermedios de los intervalos
for i in range(1, n):
    x = a + i * h
    sum_val += integrand(x)
# Calcular la aproximación de la integral utilizando el método del trapecio
approximation = h * (0.5 * (integrand(a) + integrand(b)) + sum_val)
# Imprimir el resultado
print("El valor aproximado de la integral es:", approximation)

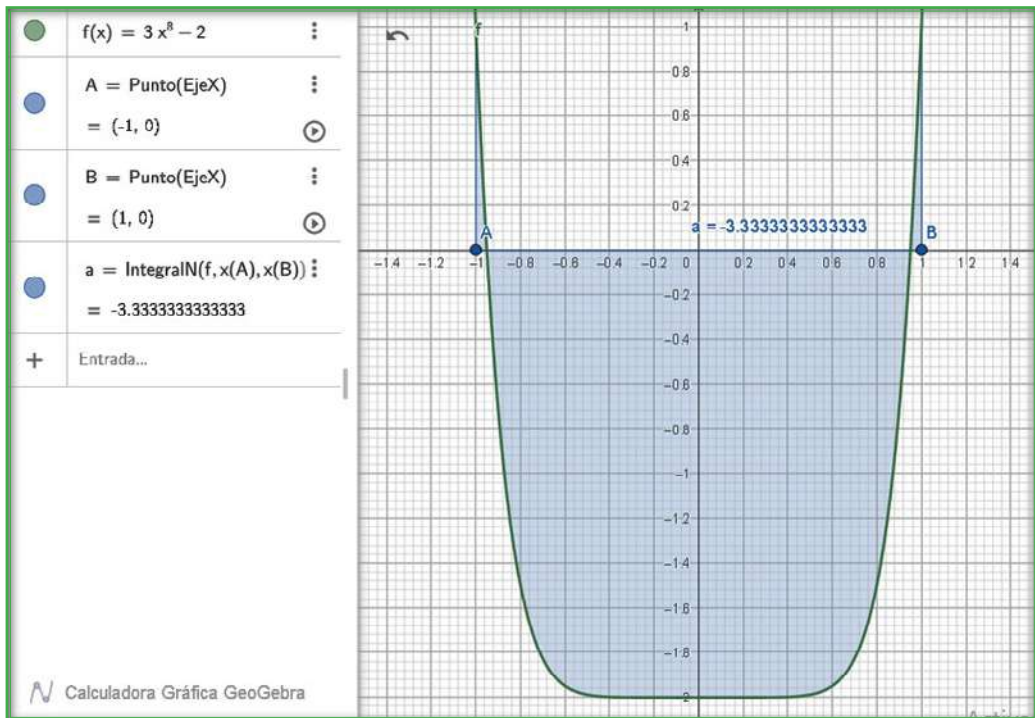
El valor aproximado de la integral es: 1.570796326794897
```

$$2.3.22. \int_{-1}^1 (3x^8 - 2) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{x^9}{9} - 2x \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \left[\frac{(1)^9}{9} - 2(1) \right] - \left[\frac{(-1)^9}{9} - 2(-1) \right] \\
 &= \left(\frac{1}{9} - 2 \right) - \left(-\frac{1}{9} + 2 \right) \\
 &= -\frac{10}{9} \\
 &= -3,3333333 \, u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.46. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.integrate import quad

# Definir la función

def f(x):

    return (3*(x)**8 - 2)

# Calcular la integral definida

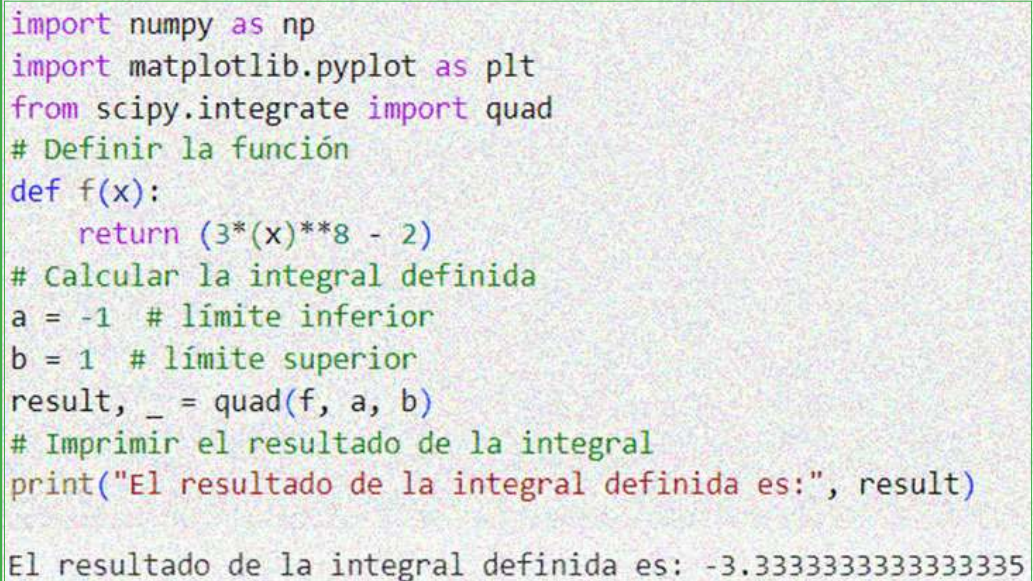
a = -1 # límite inferior

b = 1 # límite superior

result, _ = quad(f, a, b)

# Imprimir el resultado de la integral

print("El resultado de la integral definida es:", result)
```

Figura 2.47. Análisis 24

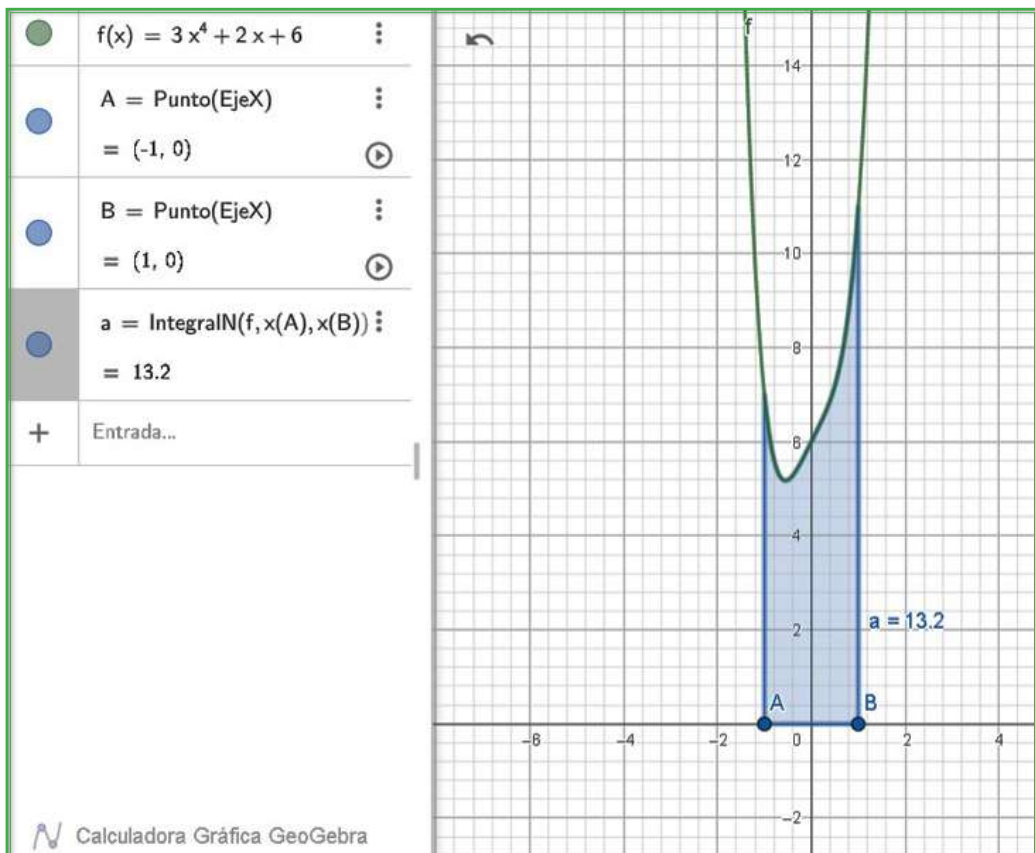
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
# Definir la función
def f(x):
    return (3*(x)**8 - 2)
# Calcular la integral definida
a = -1 # límite inferior
b = 1 # límite superior
result, _ = quad(f, a, b)
# Imprimir el resultado de la integral
print("El resultado de la integral definida es:", result)

El resultado de la integral definida es: -3.3333333333333335
```

$$\begin{aligned}
 2.3.23. \quad & \int_{-1}^1 (3x^4 + 2x + 6) dx \\
 & 3 \int_{-1}^1 x^4 dx + 2 \int_{-1}^1 x dx + 6 \int_{-1}^1 1 dx \\
 & = \left(\frac{3x^5}{5} + x^2 + 6x \right) \Big|_{-1}^1 \\
 & = \left[\frac{3(1)^5}{5} + (1^2) + 6(1) \right] - \left[\frac{3(-1)^5}{5} + (-1^2) + 6(-1) \right] \\
 & = \frac{66}{5} \\
 & = 13,2 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

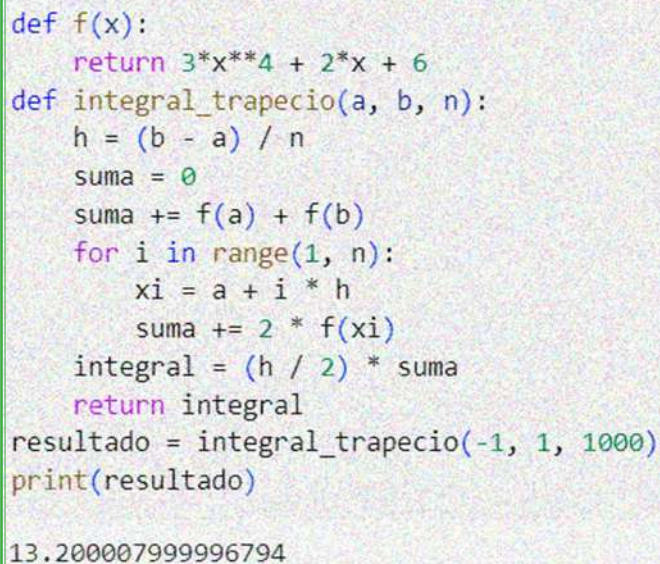
Figura 2.48. Gráfica de la integral



Fuente: Autores

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

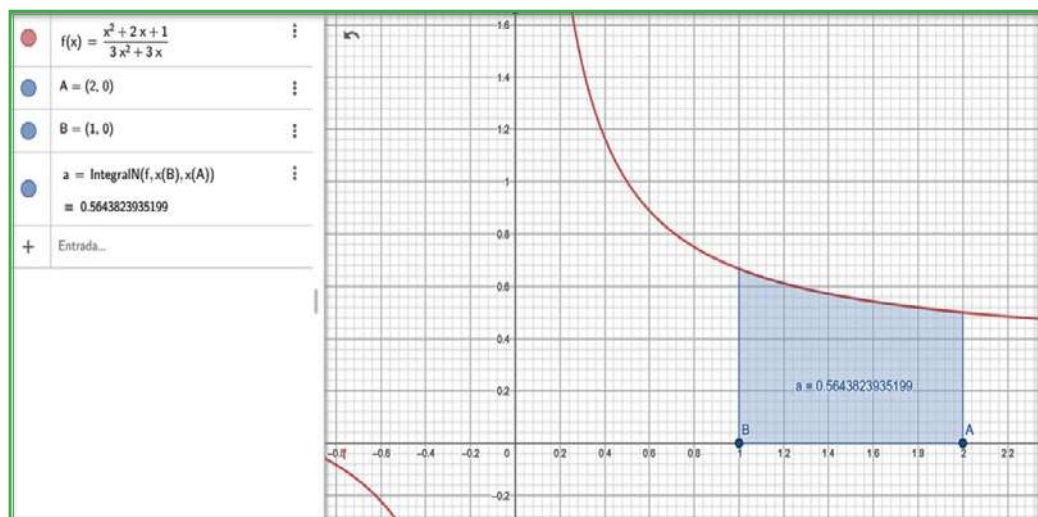
```
def f(x):  
    return 3*x**4 + 2*x + 6  
  
def integral_trapecio(a, b, n):  
    h = (b - a) / n  
    suma = 0  
    suma += f(a) + f(b)  
    for i in range(1, n):  
        xi = a + i * h  
        suma += 2 * f(xi)  
    integral = (h / 2) * suma  
    return integral  
  
resultado = integral_trapecio(-1, 1, 1000)  
print(resultado)
```

Figura 2.49. Análisis 25

```
def f(x):  
    return 3*x**4 + 2*x + 6  
def integral_trapecio(a, b, n):  
    h = (b - a) / n  
    suma = 0  
    suma += f(a) + f(b)  
    for i in range(1, n):  
        xi = a + i * h  
        suma += 2 * f(xi)  
    integral = (h / 2) * suma  
    return integral  
resultado = integral_trapecio(-1, 1, 1000)  
print(resultado)  
13.200007999996794
```

$$\begin{aligned}
2.3.24. \quad & \int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 + 3x} dx \\
& \int_1^2 \frac{(x+1)^2}{3x(x+1)} dx \\
& = \int_1^2 \frac{x+1}{3x} dx \\
& = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{x+1}{x} dx \\
& = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{x}{x} + \frac{1}{x} dx \\
& = \frac{1}{3} \left(\int_1^2 1 dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx \right) \\
& = \frac{1}{3} (x + \ln(|x|)) \\
& = \frac{1}{3} * x + \frac{1}{3} * \ln(|x|) \\
& = \frac{1}{3} x + \frac{1}{3} * \ln(|x|) \Big|_1^2 \\
& = \frac{1}{3} * 2 + \frac{1}{3} * \ln(|2|) - \left(\frac{1}{3} * 1 + \frac{1}{3} * \ln(|1|) \right) \\
& = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \ln(2) \\
& = 0,564382 u^2
\end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.50. Gráfica de la integral

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from sympy import symbols, integrate

x = symbols('x')

expr = (x*2 + 2*x + 1) / (3*x*2 + 3*x)

integral = integrate(expr, x)

a = 1 # Límite inferior
b = 2 # Límite superior

result = integral.evalf(subs={x: b}) - integral.evalf(subs={x: a})

print("El valor de la integral definida es:", result)

```

Figura 2.51. Análisis 26

```

from sympy import symbols, integrate
x = symbols('x')
expr = (x**2 + 2*x + 1) / (3*x**2 + 3*x)
integral = integrate(expr, x)
a = 1 # Límite inferior
b = 2 # Límite superior
result = integral.evalf(subs={x: b}) - integral.evalf(subs={x: a})
print("El valor de la integral definida es:", result)

El valor de la integral definida es: 0.521460797839994

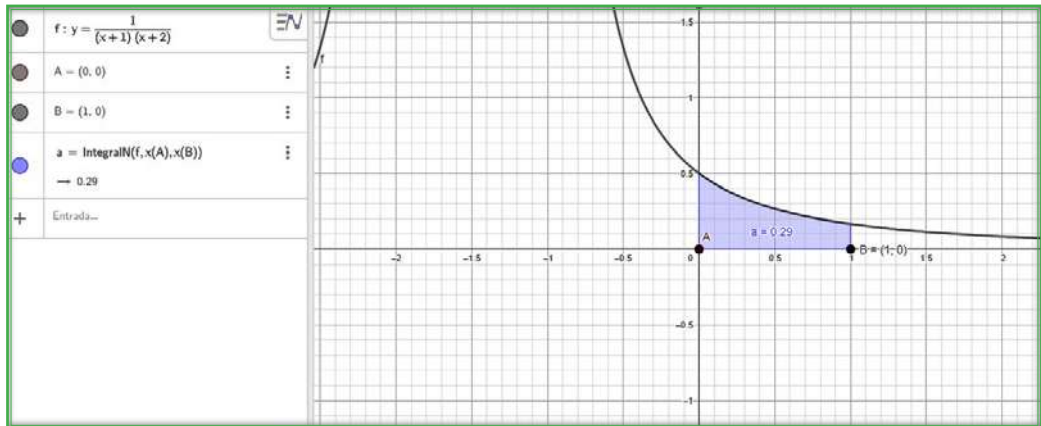
```

2.3.25. $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$

Descomposición de factores: se divide en dos factores.

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)} - \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)} \\
 &= \ln(|x+1|) - \ln(|x+2|) \\
 &= (\ln(|x+1|) - \ln(|x+2|)) \\
 &= \ln(|x+1|) - \ln(|x+2|) \Big|_0^1 \\
 &= \ln(|2+1|) - \ln(|2+2|) - [\ln(|1+1|) - \ln(|1+2|)] \\
 &= \ln \frac{4}{3} \\
 &= 0,29 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.52. Gráfica de la integral

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy import integrate

# Definir la función que quieres integrar
def f(x):
    return 1/((x+1)*(x+2))

# Definir los límites de integración
a = 0 # Límite inferior
b = 1 # Límite superior

# Calcular la integral definida
resultado, error = integrate.quad(f, a, b)

# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

```

Figura 2.53. Análisis 27

```

from scipy import integrate
# Definir la función que quieres integrar
def f(x):
    return 1/((x+1)*(x+2))
# Definir los límites de integración
a = 0 # Límite inferior
b = 1 # Límite superior
# Calcular la integral definida
resultado, error = integrate.quad(f, a, b)
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

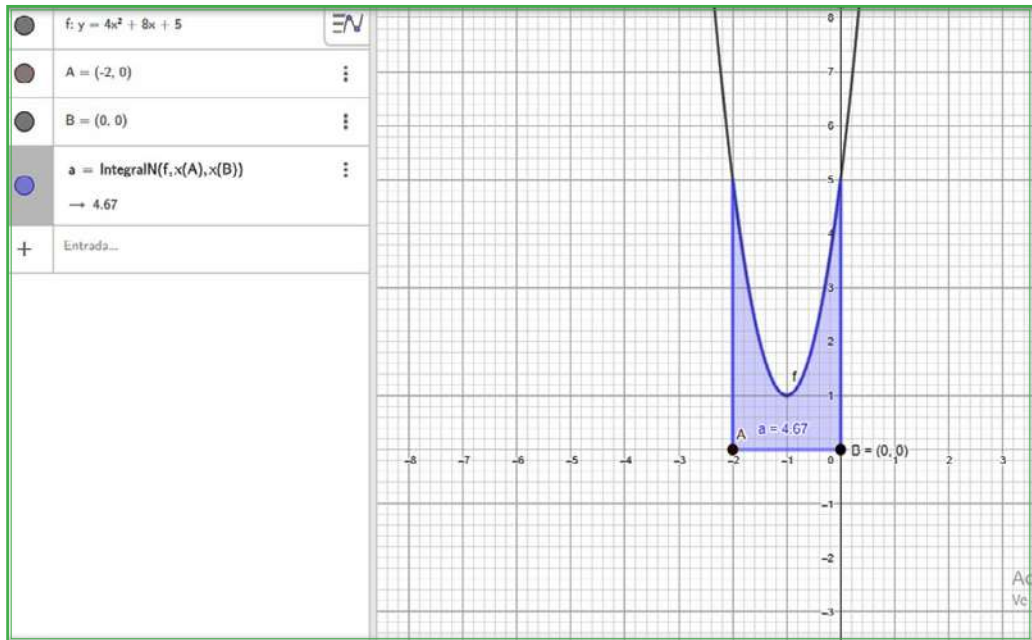
El resultado de la integral es: 0.2876820724517809

```

2.3.26. $\int_{-2}^0 4x^2 + 8x + 5 \, dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int 4x^2 dx + \int 8x dx + \int 5 dx \\
 &= \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 + 5x \Big|_{-2}^0 \\
 &= \frac{4}{3}(0)^3 + 4(0)^2 + 5(0) - \left[\frac{4}{3}(-2)^3 + 4(-2)^2 + 5(-2) \right] \\
 &= \frac{14}{3} \\
 &= 4,67 \, u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.54. Gráfica de la integral

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy.integrate import quad

# Definir la función que deseas integrar
def f(x):
    return 4* x **2 + 8 *x + 5

# Definir los límites de integración
a = -2 # Límite inferior
b = 0 # Límite superior

# Calcular la integral definida
resultado, error = quad(f, a, b)

# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

```

Figura 2.55. Análisis 29

```

from scipy.integrate import quad
# Definir la función que deseas integrar
def f(x):
    return 4* x **2 + 8 *x + 5
# Definir los límites de integración
a = -2 # Límite inferior
b = 0 # Límite superior
# Calcular la integral definida
resultado, error = quad(f, a, b)
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

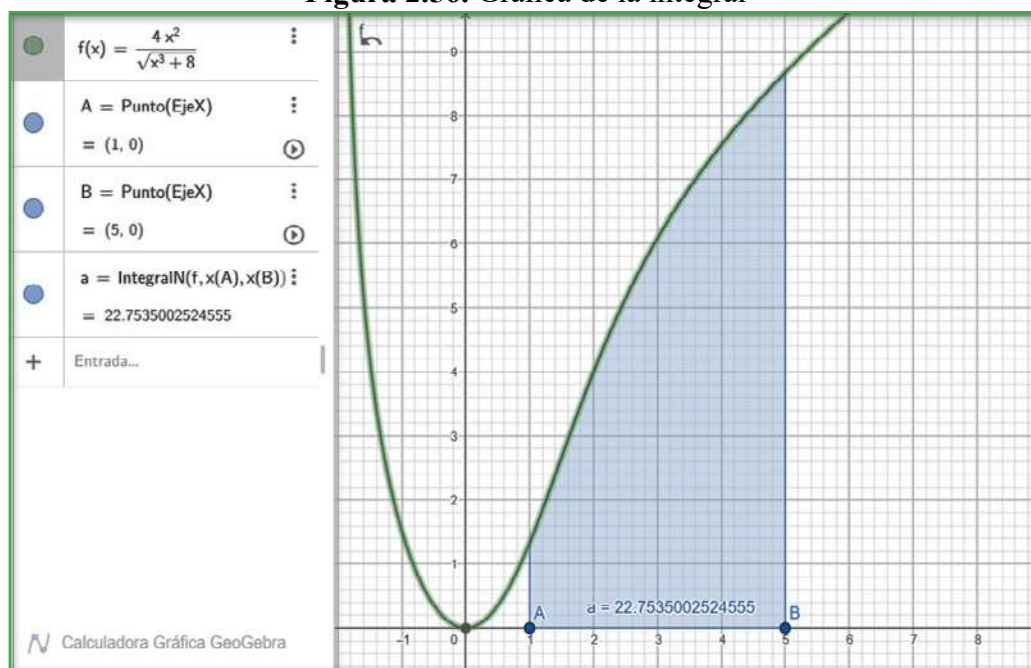
El resultado de la integral es: 4.666666666666667

```

$$2.3.27. \int_1^5 \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+8}} dx$$

$$\begin{aligned}
 u &= x^3 + 8 \\
 du &= 4x^2 dx \\
 &= \frac{4}{3} \int_1^5 \frac{du}{\sqrt{u}} \\
 &= \frac{4}{3} \int_1^5 u^{-\frac{1}{2}} du \\
 &= \frac{4}{3} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^5 \\
 &= \frac{8}{3} * \sqrt{u} \Big|_1^5 \\
 &= \frac{8}{3} * \sqrt{x^3 + 8} \Big|_1^5 \\
 &= \left(\frac{8}{3} * \sqrt{5^3 + 8} \right) - \left(\frac{8}{3} * \sqrt{1^3 + 8} \right) \\
 &= 30,753500 - 830,753500 - 8 \\
 &= 22,753500 u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función

Figura 2.56. Gráfica de la integral

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.integrate import quad

# Definir la función a integrar
def f(x):
    return (4*x*2) / np.sqrt(x*3 + 8)

# Definir los límites de integración
a = 1 # Límite inferior
b = 5 # Límite superior

# Resolver la integral definida
integral, error = quad(f, a, b)
```

```
# Imprimir el resultado de la integral

print("El valor de la integral es:", integral)

# Crear una serie de puntos en el intervalo de integración

x = np.linspace(a, b, 100)

y = f(x)
```

Figura 2.57. Análisis 30

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
# Definir la función a integrar
def f(x):
    return (4*x**2) / np.sqrt(x**3 + 8)
# Definir los límites de integración
a = 1 # Límite inferior
b = 5 # Límite superior
# Resolver la integral definida
integral, error = quad(f, a, b)
# Imprimir el resultado de la integral
print("El valor de la integral es:", integral)
# Crear una serie de puntos en el intervalo de integración
x = np.linspace(a, b, 100)
y = f(x)

El valor de la integral es: 22.708320445219243
```

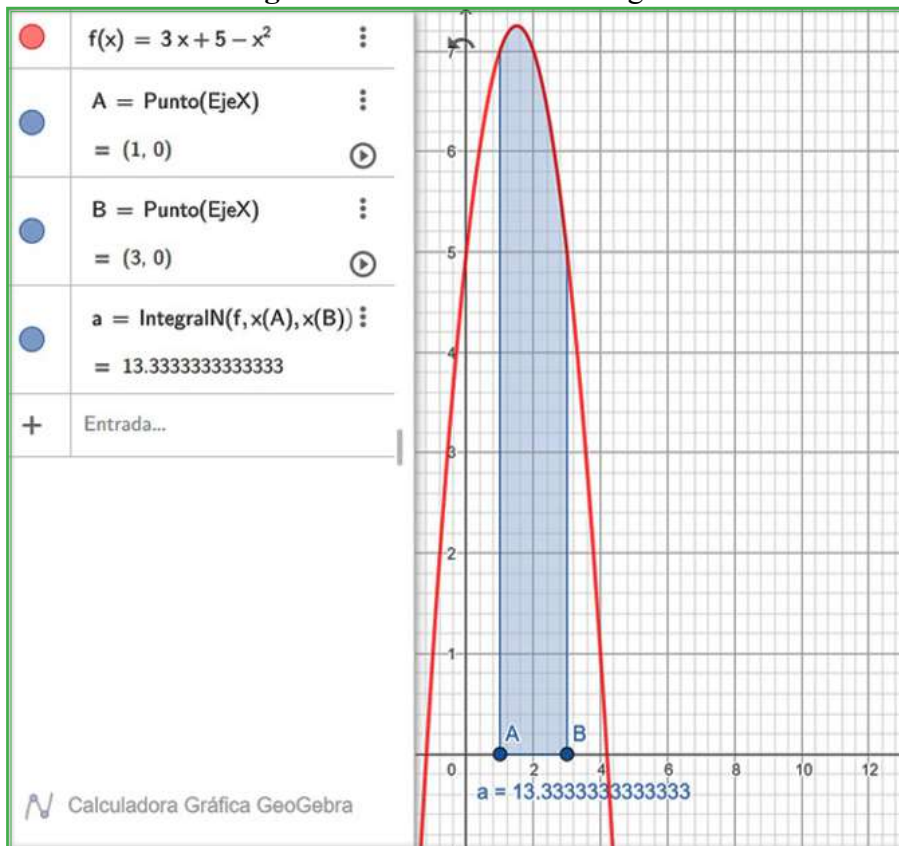
2.3.28. $\int_1^3 [(3x + 5) - x^2] dx$

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 (3x + 5 - x^2) dx \\
 &= \int_1^3 3x dx + \int_1^3 5 dx - \int_1^3 x^2 dx \\
 &= \left. \frac{3x^2}{2} \right|_1^3 + 5x \Big|_1^3 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 \\
 &= \frac{3(3)^2}{2} - \frac{3(1)^2}{2} + 5(3) - 5(1) - \frac{3^3}{3} + \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3(9)}{2} - \frac{3(1)}{2} + 15 - 5 - \frac{27}{3} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{27}{2} - \frac{3}{2} + 10 - 9 + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{40}{3} \\
 &= 13,333333 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.58. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.integrate import quad

```

```
# Definir la función a integrar
def f(x):
    return (3*x + 5) - x**2

# Definir los límites de integración
a = 1 # Límite inferior
b = 3 # Límite superior

# Resolver la integral definida
integral, error = quad(f, a, b)

# Imprimir el resultado de la integral
print("El valor de la integral es:", integral)

# Crear una serie de puntos en el intervalo de integración
x = np.linspace(a, b, 100)
y = f(x)
```

Figura 2.59. Análisis 31

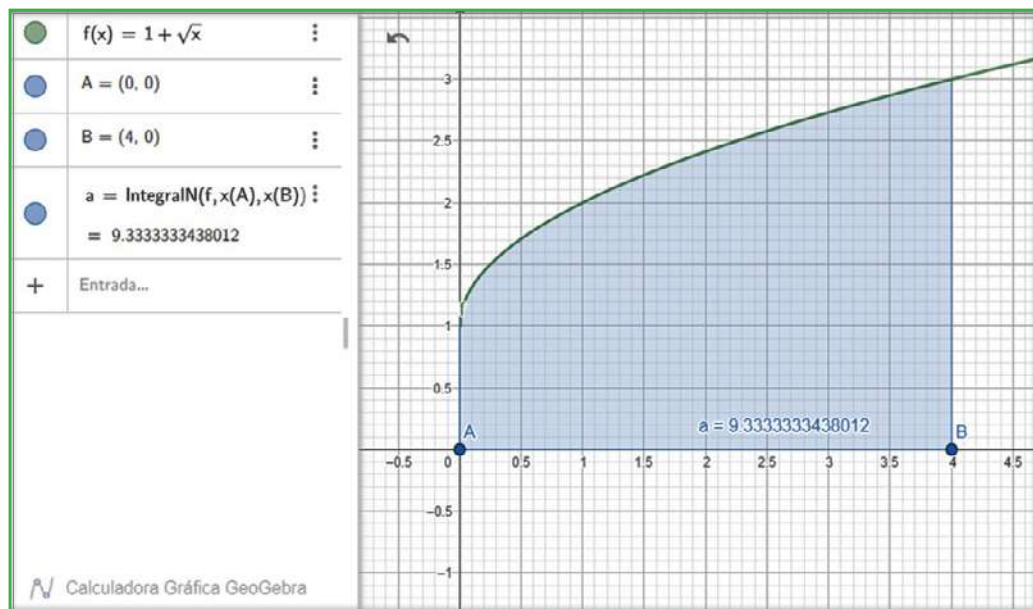
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
# Definir la función a integrar
def f(x):
    return (3*x + 5) - x**2
# Definir los límites de integración
a = 1 # Límite inferior
b = 3 # Límite superior
# Resolver la integral definida
integral, error = quad(f, a, b)
# Imprimir el resultado de la integral
print("El valor de la integral es:", integral)
# Crear una serie de puntos en el intervalo de integración
x = np.linspace(a, b, 100)
y = f(x)

El valor de la integral es: 13.333333333333334
```

$$\begin{aligned}
 2.3.29. \quad & \int_0^4 (1 + \sqrt{x}) dx \\
 & \int 1 + \sqrt{x} dx \\
 & = \int 1 + x^{\frac{1}{2}} dx \\
 & = \int 1 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx \\
 & = x + \frac{2\sqrt{x} * |x|}{3} \\
 & = \left(x + \frac{2\sqrt{x} * |x|}{3} \right) \Big|_0^4 \\
 & = 4 + \frac{2\sqrt{4} * |4|}{3} - \left(0 + \frac{2\sqrt{0} * |0|}{3} \right) \\
 & = \frac{28}{3} \\
 & = 9,3333333 u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.60. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.integrate import quad

def funcion(x):

    return 1 + np.sqrt(x)

a = 0 # Límite inferior

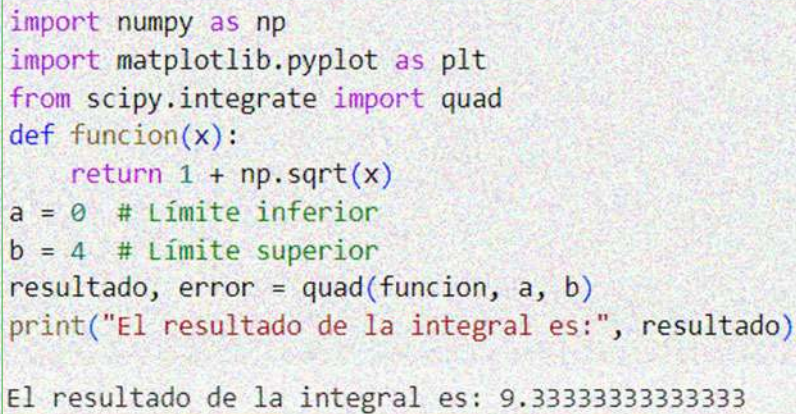
b = 4 # Límite superior

resultado, error = quad(funcion, a, b)

print("El resultado de la integral es:", resultado)

```

Figura 2.61. Análisis 33



```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
def funcion(x):
    return 1 + np.sqrt(x)
a = 0 # Límite inferior
b = 4 # Límite superior
resultado, error = quad(funcion, a, b)
print("El resultado de la integral es:", resultado)

```

El resultado de la integral es: 9.333333333333333

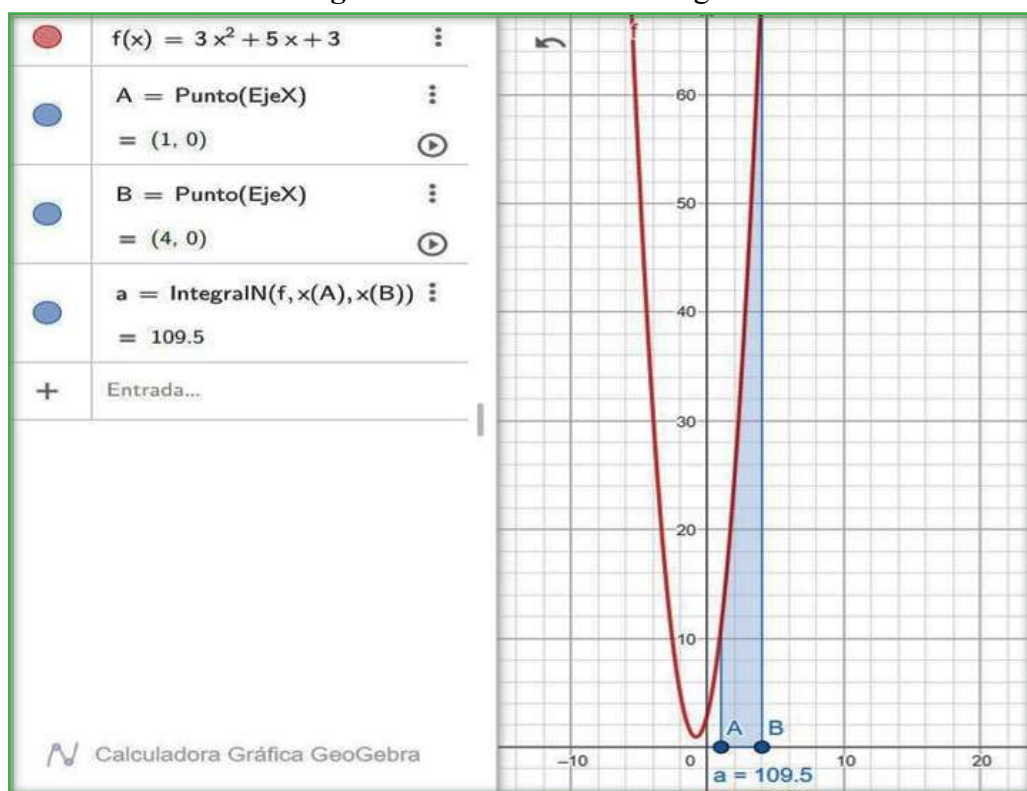
2.3.30. $\int_1^4 (3x^2 + 5x + 3)dx$

$$\begin{aligned}
 & \int 3x^2 + 5x + 3dx \\
 &= \int 3x^2 dx + \int 5x dx + \int 3dx \\
 &= x^3 + \frac{5x^2}{2} + 3x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(x^3 + \frac{5x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^4 \\
 &= 4^3 + \frac{5 \cdot 4^2}{2} + 3 \cdot 4 - \left(1^3 + \frac{5 \cdot 1^2}{2} + 3 \cdot 1 \right) \\
 &= \frac{219}{2} \\
 &= 109,5 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.62. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy.integrate import quad

# Definir la función

def funcion(x):

```

```

return 3 * x**2 + 5 * x + 3

# Definir los límites de integración

lim_inf = 1

lim_sup = 4

# Calcular la integral definida

resultado, error = quad(funcion, lim_inf, lim_sup)

# Imprimir el resultado

print("El resultado de la integral definida es:", resultado)

```

Figura 2.63. Análisis 34

```

from scipy.integrate import quad
# Definir la función
def funcion(x):
    return 3 * x**2 + 5 * x + 3
# Definir los límites de integración
lim_inf = 1
lim_sup = 4
# Calcular la integral definida
resultado, error = quad(funcion, lim_inf, lim_sup)
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral definida es:", resultado)

El resultado de la integral definida es: 109.5

```

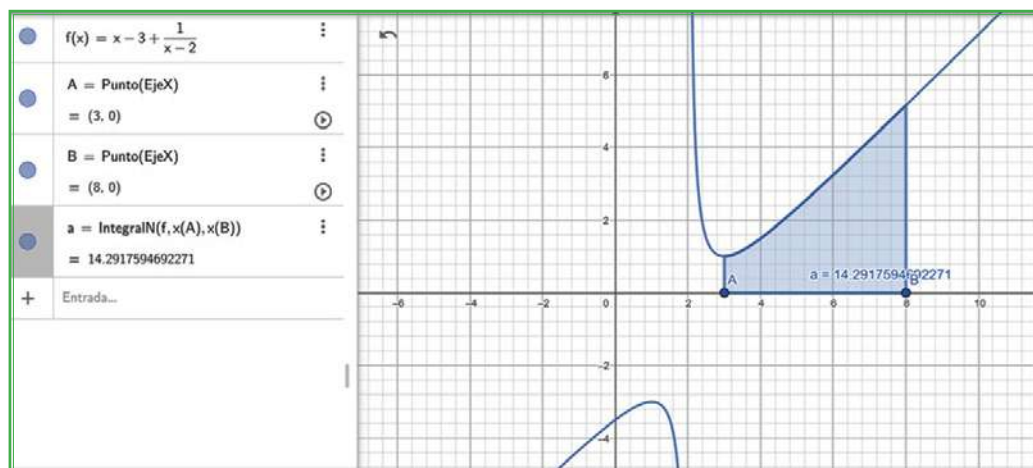
2.3.31. $\int_3^8 \left(x - 3 + \frac{1}{x-2} \right) dx$

$$\begin{aligned}
 & \int_3^8 \left(x - 3 + \frac{1}{x-2} \right) dx \\
 &= \left(\frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x-2| \right) \Big|_3^8 \\
 &= \left(\frac{8^2}{2} - 3(8) + \ln|8-2| \right) - \left(\frac{3^2}{2} - 3(3) + \ln|3-2| \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{64}{2} - 24 + \ln 6 \right) - \left(\frac{9}{2} - 9 + \ln 1 \right) \\
 &= (32 - 24 + \ln 6) - (4.5 - 9 + \ln 1) \\
 &= (8 + \ln 6) - (-4.5 + \ln 1) \\
 &= (8 + \ln 6) - (-4.5) \\
 &= (8 + \ln 6) + 4.5 \\
 &= 12,5 + \ln 6 \\
 &= 14,29175947 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.64. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
from scipy.integrate import quad
```

```
def integrand(x):
```

```
    return x - 3 + 1/(x - 2)
```

```
# Límites de integración
```

```
a = 3
```

```
b = 8
```

```
# Resuelve la integral definida

result, error = quad(integrand, a, b)

# Imprime el resultado

print("El resultado de la integral es:", result)
```

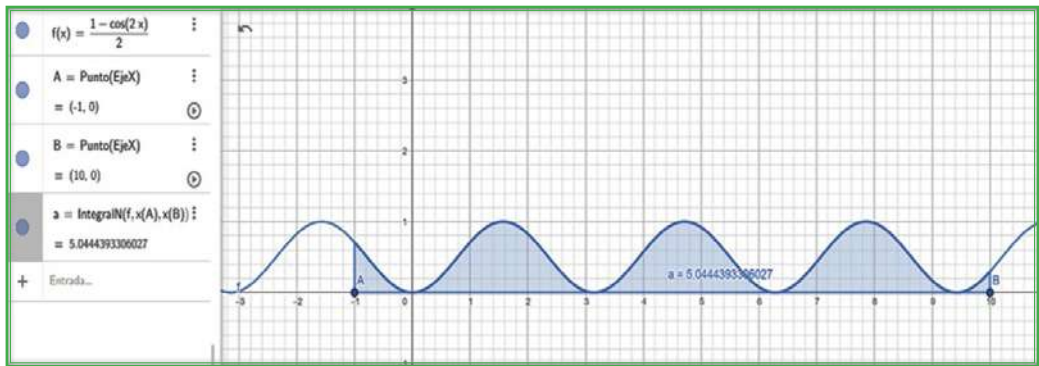
Figura 2.65. Análisis 35

```
from scipy.integrate import quad
def integrand(x):
    return x - 3 + 1/(x - 2)
# Límites de integración
a = 3
b = 8
# Resuelve la integral definida
result, error = quad(integrand, a, b)
# Imprime el resultado
print("El resultado de la integral es:", result)

El resultado de la integral es: 14.291759469228085
```

$$\begin{aligned}
 2.3.32. \quad & \int_{-1}^{10} \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) dx \\
 &= \int_{-1}^{10} \frac{1}{2} dx - \int_{-1}^{10} \frac{\cos(2x)}{2} dx \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right) \Big|_{-1}^{10} - \left(\frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_{-1}^{10} \\
 &= \frac{1}{2} (10 - (-1)) - \frac{1}{4} (\sin(2 * 10) - \sin(2 * -1)) \\
 &= \left(\frac{10}{2} - \frac{-1}{2} \right) - \left(\frac{\sin(2 * 10)}{4} - \frac{\sin(2 * -1)}{4} \right) \\
 &= (5 - (-0,5)) - (0,2282363127 - (-0,2273243567)) \\
 &= (5 + 0,5) - (0,2282363127 + 0,2273243567) \\
 &= (5,5) - (0,455560669) \\
 &= 5,044439331 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.66. Gráfica de la integral

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy.integrate import quad

import numpy as np

# Función a integrar
def f(x):
    return (1 - np.cos(2*x)) / 2

# Límites de integración
a = -1
b = 10

# Resolución de la integral
resultado, error = quad(f, a, b)

print("El resultado de la integral es:", resultado)

```

Figura 2.67. Análisis 36

```

from scipy.integrate import quad
import numpy as np
# Función a integrar
def f(x):
    return (1 - np.cos(2*x)) / 2
# Límites de integración
a = -1
b = 10
# Resolución de la integral
resultado, error = quad(f, a, b)
print("El resultado de la integral es:", resultado)

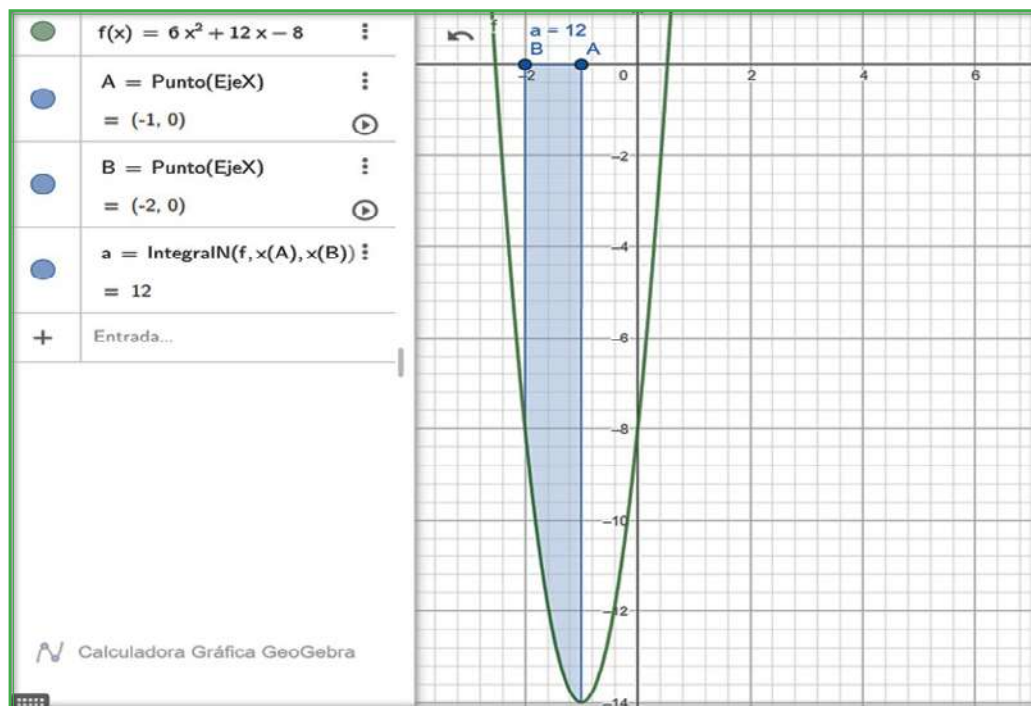
El resultado de la integral es: 5.044439330611673

```

$$\begin{aligned}
 \text{2.3.33. } & \int_{-2}^{-1} (6x^2 + 12x - 8) dx \\
 &= \left(\frac{6x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} - 8x \right) \Big|_{-2}^{-1} \\
 &= 2x^3 + 6x^2 - 8x \Big|_{-2}^{-1} \\
 &= (2(-2)^3 + 6(-2)^2 - 8(-2) - (2(-1)^3 + 6(-1)^2 - 8(-1))) \\
 &= (2(-8) + 6(4) + 16) - (2(-1) + 6(1) + 8) \\
 &= (-16 + 24 + 16) - (-2 + 6 + 8) \\
 &= (24) - (12) \\
 &= 12 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.68. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy.integrate import quad

# Definir la función a integrar
def funcion(X):
    return 6*X**2 + 12*X - 8

# Definir los límites de integración
a = -1 # Límite inferior
b = -2 # Límite superior

# Calcular la integral
resultado, error = quad(funcion, a, b)

# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

```

Figura 2.69. Análisis 37

```

from scipy.integrate import quad
# Definir la función a integrar
def funcion(X):
    return 6*X**2 + 12*X - 8
# Definir los límites de integración
a = -1 # Límite inferior
b = -2 # Límite superior
# Calcular la integral
resultado, error = quad(funcion, a, b)
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

El resultado de la integral es: 12.0

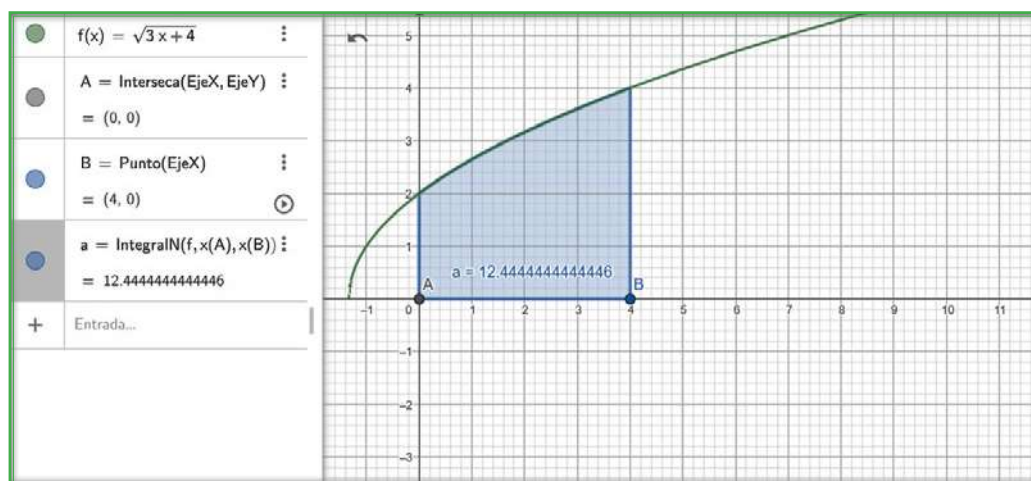
```

$$\begin{aligned}
 2.3.34. \quad & \int_0^4 \sqrt{3x+4} \, dx \\
 &= \int_4^{16} (3x+4)^{1/2} \, dx \\
 &= \int_4^{16} v^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{3} \\
 &= \frac{1}{3} \int_4^{16} v^{1/2} \, dv \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{v^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) \Big|_4^{16} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_4^{16} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2v^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_4^{16} \\
 &= \left(\frac{2\sqrt{v^3}}{9} \right) \Big|_4^{16} \text{ XXZ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\sqrt{(16)^3}}{9} - \frac{2\sqrt{4^3}}{9} \\
 &= \frac{2(4)^3}{9} - \frac{2(2)^3}{9} \\
 &= \frac{2(64)}{9} - \frac{2(8)}{9} \\
 &= \frac{128}{9} - \frac{16}{9} \\
 &= \frac{112}{9} \\
 &= 12,444 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.70. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy.integrate import quad

# Definir la función que se desea integrar
def f(x):
    return (3*x + 4)**(1/2)

# Definir los límites de integración

```

```

a = 0
b = 4
# Calcular la integral definida
resultado, error = quad(f, a, b)
# Imprimir el resultado
print(resultado)

```

Figura 2.71. Análisis 38

```

from scipy.integrate import quad
# Definir la función que se desea integrar
def f(x):
    return (3*x + 4)**(1/2)
# Definir los límites de integración
a = 0
b = 4
# Calcular la integral definida
resultado, error = quad(f, a, b)
# Imprimir el resultado
print(resultado)

12.4444444444444446

```

2.3.35. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3}$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3} \\
 &= \int_{-2}^{-1} (x-1)^{-3} dx
 \end{aligned}$$

Fórmula

$$\begin{aligned}
 \int u^n dx &= \frac{u^{n+1}}{n+1} \\
 \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3} &= \frac{(x-1)^{-3+1}}{-3+1} \int_{-2}^{-1} = \frac{(x-1)^{-2}}{-2} \int_{-2}^{-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{(-1-1)^2} - \frac{1}{(-2-1)^2} \right] \\
&= \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^2} \right] \\
&= \frac{-1}{2} \left[\frac{9-4}{36} \right] \\
&= \frac{-1}{2} \left[\frac{5}{36} \right] \\
&= -\frac{5}{72} \\
&= -0,06944 u^2
\end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.72. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from sympy import symbols, integrate

# Definir la variable simbólica y la función
x = symbols('x')
f = (1) / ((x - 1)**3)

# Calcular la integral definida
resultado = integrate(f, (x, -2, -1))

# Imprimir el resultado
print(resultado)

```

Figura 2.73. Análisis 39

```

from sympy import symbols, integrate
# Definir la variable simbólica y la función
x = symbols('x')
f = (1) / ((x - 1)**3)
# Calcular la integral definida
resultado = integrate(f, (x, -2, -1))
# Imprimir el resultado
print(resultado)

-5/72

```

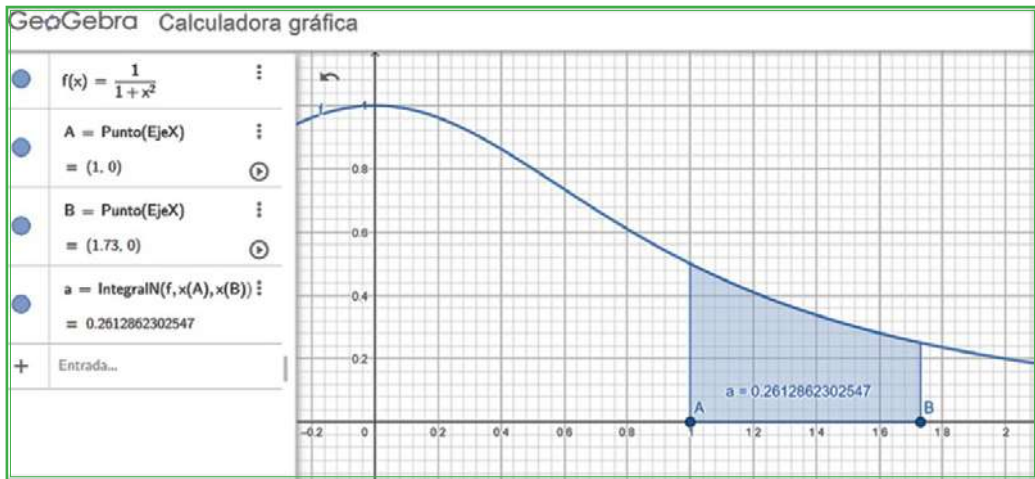
$$2.3.36. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

Esta integral se resuelve muy rápido si recordamos que

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x \int_1^{\sqrt{3}} . \\
 &= \arctan \sqrt{3} - \arctan 1 \\
 &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\pi}{12} \\
 &= 0,2617 \text{ u}^2\text{u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.74. Gráfica



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import numpy as np

# Definición de la función a integrar
def f(x):
    return 1 / (1 + x**2)

# Límites de integración
a = 1 # Límite inferior
b = np.sqrt(3) # Límite superior

# Número de puntos para la aproximación numérica
n = 1000

# Resolución de la integral definida utilizando la regla del trapecio
x_vals = np.linspace(a, b, n)
dx = (b - a) / n
integral = np.sum((f(x_vals[:-1]) + f(x_vals[1:])) * dx / 2)
print("El resultado de la integral definida es:", integral)
```

Figura 2.75. Análisis 40

```

import numpy as np
# Definición de la función a integrar
def f(x):
    return 1 / (1 + x**2)
# Límites de integración
a = 1 # Límite inferior
b = np.sqrt(3) # Límite superior
# Número de puntos para la aproximación numérica
n = 1000
# Resolución de la integral definida utilizando la regla del trapecio
x_vals = np.linspace(a, b, n)
dx = (b - a) / n
integral = np.sum((f(x_vals[:-1]) + f(x_vals[1:])) * dx / 2)
print("El resultado de la integral definida es:", integral)

El resultado de la integral definida es: 0.2615376010843391

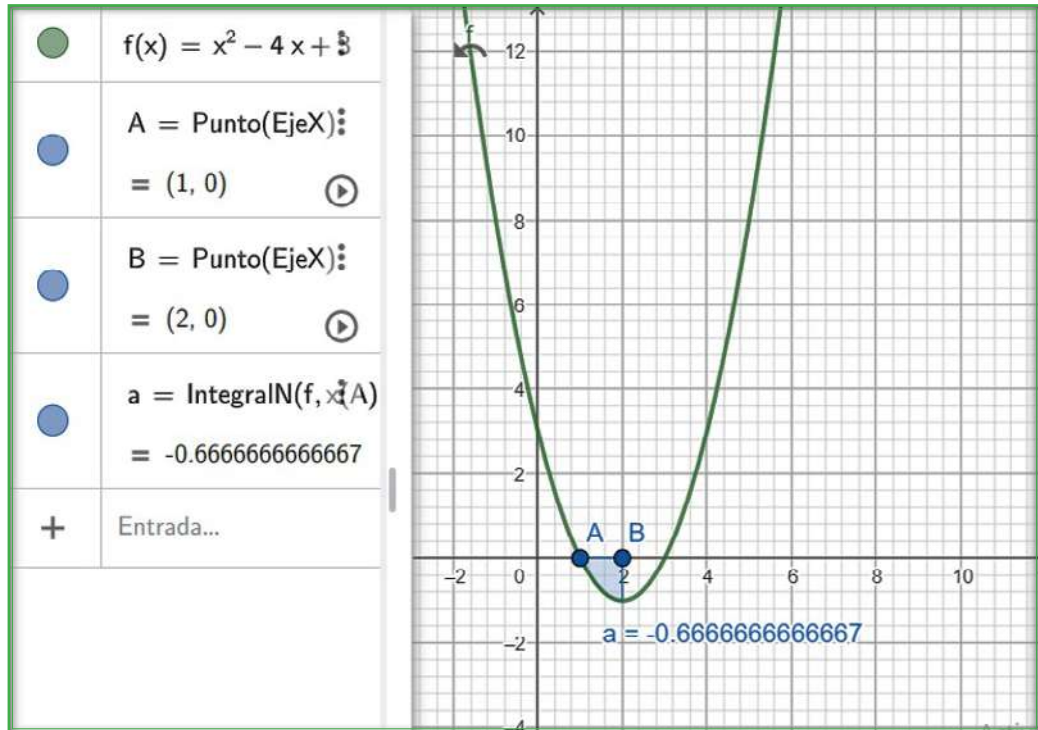
```

$$2.3.37. \int_1^2 x^2 - 4x + 3 \, dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 (x^2) dx - 4 \int_1^2 (x) dx + \int_1^2 (3) dx \\
 &= \int_1^2 x^2 dx - 4 \int_1^2 x dx + \int_1^2 3 dx \\
 &= \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + 3x \Big|_1^2 \\
 &= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \Big|_1^2 \\
 &= \frac{2^3}{3} - 2(2^2) + 3(2) - \left(\frac{1^3}{3} - 2(1^2) + 3(1) \right) \\
 &= \frac{8}{3} - 2(4) + 6 - \frac{1}{3} + 2(1) - 3 \\
 &= \frac{8}{3} - 2(4) + 6 - \frac{1}{3} + 2(1) - 3 \\
 &= -0,6666666667 \, u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.76. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import sympy as sp
x = sp.Symbol('x')
f = x**2 - 4*x + 3
integral_result = sp.integrate(f, (x, 1, 2))
print("El resultado de la integral es:", integral_result)
```

Figura 2.77. Análisis 41

```
import sympy as sp
x = sp.Symbol('x')
f = x**2 - 4*x + 3
integral_result = sp.integrate(f, (x, 1, 2))
print("El resultado de la integral es:", integral_result)

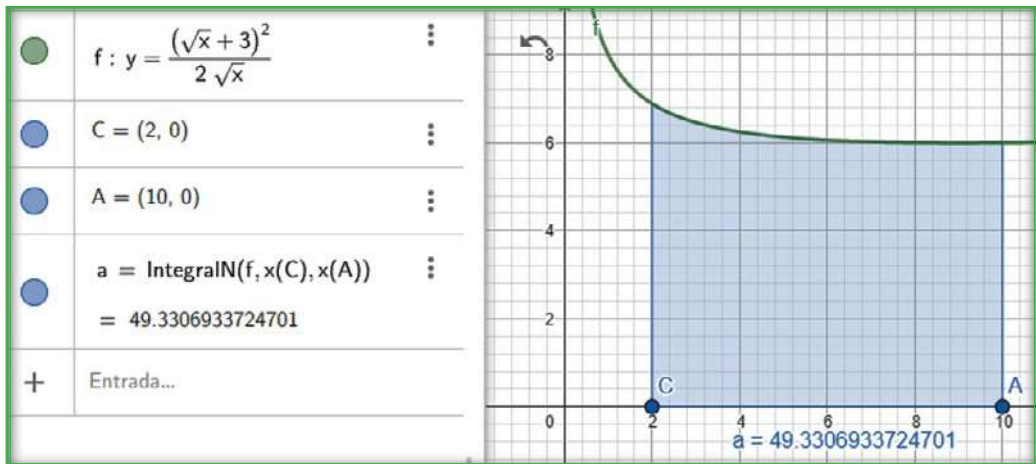
El resultado de la integral es: -2/3
```

2.3.38. $\int_2^{10} \frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{2\sqrt{x}} dx$

Aplicar álgebra a la función para facilitar su cálculo:

$$\begin{aligned}
 &= \int_2^{10} \frac{(\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x})(3) + 3^2}{2\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_2^{10} \frac{x + 6\sqrt{x} + 9}{2\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_2^{10} \frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{6\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{9}{2\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_2^{10} \frac{x}{2x^{0.5}} + 3 + \frac{9}{2x^{0.5}} dx \\
 &= \int_2^{10} \left(\frac{x^{0.5}}{2} + 3 + \frac{9x^{-0.5}}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3x + \frac{9}{2} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Bigg|_2^{10} \\
 &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + 3x + 9x^{\frac{1}{2}} \Bigg|_2^{10} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}}{3} + 3x + 9\sqrt{x} \Bigg|_2^{10} \\
 &= \left[\frac{10\sqrt{10}}{3} + 3(10) + 9\sqrt{10} \right] - \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} + 3(2) + 9\sqrt{2} \right] \\
 &= 69,0014 - 19,6707 \\
 &= 49,3307 u^2
 \end{aligned}$$

Figura 2.78. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

class IntegralDefinida:

def __init__(self, a, b, n): (Nota: es doble guion bajo para la programación)

self.a = a

self.b = b

self.n = n

def f(self, x):

return ((x**0,5 + 3)**2) / (2 * (x**0.5))

def calcular_integral(self):

h = (self.b - self.a) / self.n

suma = 0

x = self.a

for i in range(1, self.n):

x += h

suma += self.f(x)

integral = h * (0.5 * (self.f(self.a) + self.f(self.b)) + suma)

```

    return integral

# Definir los límites de integración y el número de divisiones

a = 2

b = 10

n = 1000

# Crear una instancia de la clase IntegralDefinida

integral = IntegralDefinida(a, b, n)

# Calcular la integral definida

resultado = integral.calcular_integral()

print("El resultado de la integral es:", resultado)

```

Figura 2.79. Análisis 42

```

class IntegralDefinida:
    def __init__(self, a, b, n):
        self.a = a
        self.b = b
        self.n = n
    def f(self, x):
        return ((x**0.5 + 3)**2) / (2 * (x**0.5))
    def calcular_integral(self):
        h = (self.b - self.a) / self.n
        suma = 0
        x = self.a
        for i in range(1, self.n):
            x += h
            suma += self.f(x)
        integral = h * (0.5 * (self.f(self.a) + self.f(self.b)) + suma)
        return integral

# Definir los límites de integración y el número de divisiones
a = 2
b = 10
n = 1000

# Crear una instancia de la clase IntegralDefinida
integral = IntegralDefinida(a, b, n)

# Calcular la integral definida
resultado = integral.calcular_integral()
print("El resultado de la integral es:", resultado)

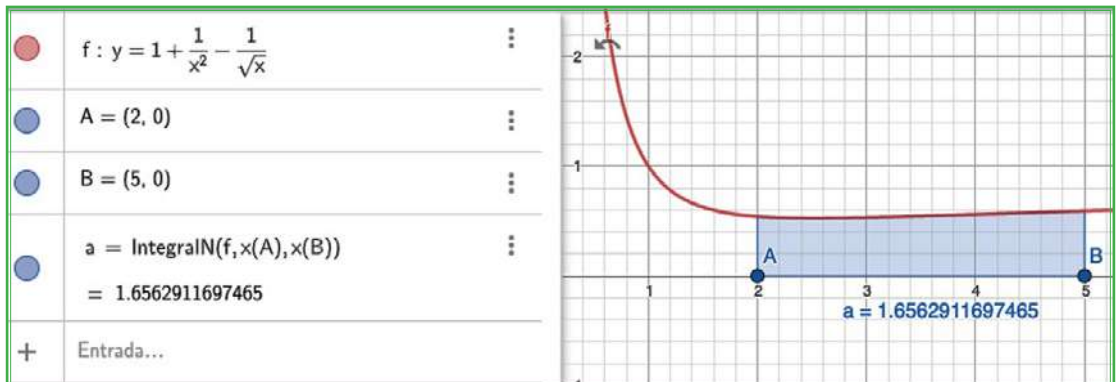
El resultado de la integral es: 49.33069671446148

```

$$\begin{aligned}
 2.3.39. \quad & \int_2^5 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_2^5 1 + x^{-2} - x^{-0,5} dx \\
 &= x + \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{0,5}}{0,5} \Big|_2^5 \\
 &= x - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{0,5} \Big|_2^5 \\
 &= 5 - \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{5}}{0,5} - \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{0,5} \right) \\
 &= 1,65629117 u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.80. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

class FuncionIntegrable:

    def _init_(self):

        pass

    def funcion(self, x):

        return 1 + 1/x**2 - 1/x**0.5

```

```
def calcular_integral_definida(self, limite_inferior, limite_superior, num_
intervalos):

    delta_x = (limite_superior - limite_inferior) / num_intervalos

    suma = 0.0

    for i in range(num_intervalos):

        x_i = limite_inferior + i * delta_x

        suma += self.funcion(x_i + delta_x/2)

    resultado = suma * delta_x

    return resultado

# Crear una instancia de la clase FuncionIntegrable
funcion_ejemplo = FuncionIntegrable()

# Definir los límites de integración y el número de intervalos
limite_inferior = 2
limite_superior = 5
num_intervalos = 1000

# Calcular la integral definida utilizando el método del punto medio
resultado = funcion_ejemplo.calcular_integral_definida(limite_inferior, li-
mite_superior, num_intervalos)

# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral definida es:", resultado)
```

Figura 2.81. Análisis 43

```

class FuncionIntegrable:
    def __init__(self):
        pass
    def funcion(self, x):
        return 1 + 1/x**2 - 1/x**0.5
    def calcular_integral_definida(self, limite_inferior, limite_superior, num_intervalos):
        delta_x = (limite_superior - limite_inferior) / num_intervalos
        suma = 0.0
        for i in range(num_intervalos):
            x_i = limite_inferior + i * delta_x
            suma += self.funcion(x_i + delta_x/2)
        resultado = suma * delta_x
        return resultado
# Crear una instancia de la clase FuncionIntegrable
funcion_ejemplo = FuncionIntegrable()
# Definir los límites de integración y el número de intervalos
limite_inferior = 2
limite_superior = 5
num_intervalos = 1000
# Calcular la integral definida utilizando el método del punto medio
resultado = funcion_ejemplo.calcular_integral_definida(limite_inferior, limite_superior, num_intervalos)
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral definida es:", resultado)
El resultado de la integral definida es: 1.6562911315174165

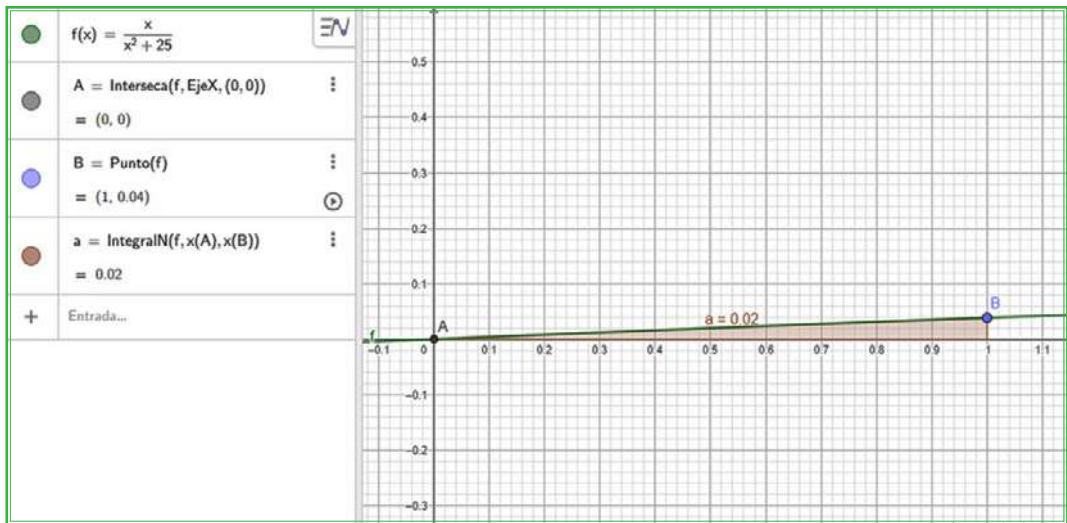
```

$$2.3.40. \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 25} dx$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x}{x^2 + 25} dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 25} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + 25) \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \ln(0^2 + 25) - \frac{1}{2} \ln(1^2 + 25) \\
 &= 0,02 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.82. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

Definir la función que se va a integrar

def f(x):

 return x / (x**2 + 25)

Definir los límites de integración

a = 0 # Límite inferior

b = 1 # Límite superior

Definir el número de subintervalos para la aproximación

n = 1000

Calcular el ancho de cada subintervalo

h = (b - a) / n

Inicializar la suma de los valores de la función

suma = 0

Calcular la suma de los valores de la función en los puntos interiores de los subintervalos

```

for i in range(1, n):
    x = a + i * h
    suma += f(x)

# Calcular la aproximación de la integral usando la regla del trapecio
resultado = h * (f(a) + f(b) + 2 * suma) / 2

# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

```

Figura 2.83. Análisis 44

```

# Definir la función que se va a integrar
def f(x):
    return x / (x**2 + 25)
# Definir los límites de integración
a = 0 # Límite inferior
b = 1 # Límite superior
# Definir el número de subintervalos para la aproximación
n = 1000
# Calcular el ancho de cada subintervalo
h = (b - a) / n
# Inicializar la suma de los valores de la función
suma = 0
# Calcular la suma de los valores de la función en los puntos interiores de los subintervalos
for i in range(1, n):
    x = a + i * h
    suma += f(x)
# Calcular la aproximación de la integral usando la regla del trapecio
resultado = h * (f(a) + f(b) + 2 * suma) / 2
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral es:", resultado)

El resultado de la integral es: 0.019610356201887193

```

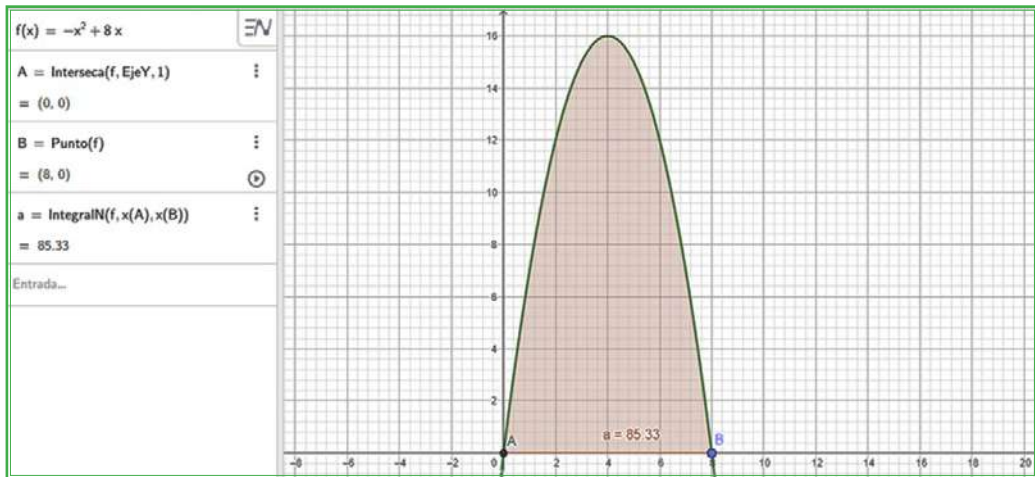
2.3.41. $\int_0^8 (-x^2 + 8x) dx$

$$\begin{aligned}
 &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} \right) \Big|_0^8 \\
 &= \left(-\frac{x^3}{3} + 4x^2 \right) \Big|_0^8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(-\frac{8^3}{3} + 4(8)^2 \right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 4(0)^2 \right) \\
 &= (-170,66 + 256) - 0 \\
 &= 85,33u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.84. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

def funcion(x):
    return -x**2 + 8*x

def calcular_integral_definida(funcion, limite_inferior, limite_superior, numero_intervalos):
    intervalo = (limite_superior - limite_inferior) / numero_intervalos
    suma_integral = 0
    for i in range(numero_intervalos):
        x = limite_inferior + (i + 0.5) * intervalo
        suma_integral += funcion(x)
    resultado = intervalo * suma_integral

```

```

return resultado

# Definir los límites de integración

limite_inferior = 0

limite_superior = 8

# Calcular la integral definida con 100 intervalos

resultado = calcular_integral_definida(funcion, limite_inferior, limite_superior, 100)

# Imprimir el resultado

print(resultado)

```

Figura 2.85. Análisis 45

```

def funcion(x):
    return -x**2 + 8*x
def calcular_integral_definida(funcion, limite_inferior, limite_superior, numero_intervalos):
    intervalo = (limite_superior - limite_inferior) / numero_intervalos
    suma_integral = 0
    for i in range(numero_intervalos):
        x = limite_inferior + (i + 0.5) * intervalo
        suma_integral += funcion(x)
    resultado = intervalo * suma_integral
    return resultado
# Definir los límites de integración
limite_inferior = 0
limite_superior = 8
# Calcular la integral definida con 100 intervalos
resultado = calcular_integral_definida(funcion, limite_inferior, limite_superior, 100)
# Imprimir el resultado
print(resultado)

85.33759999999995

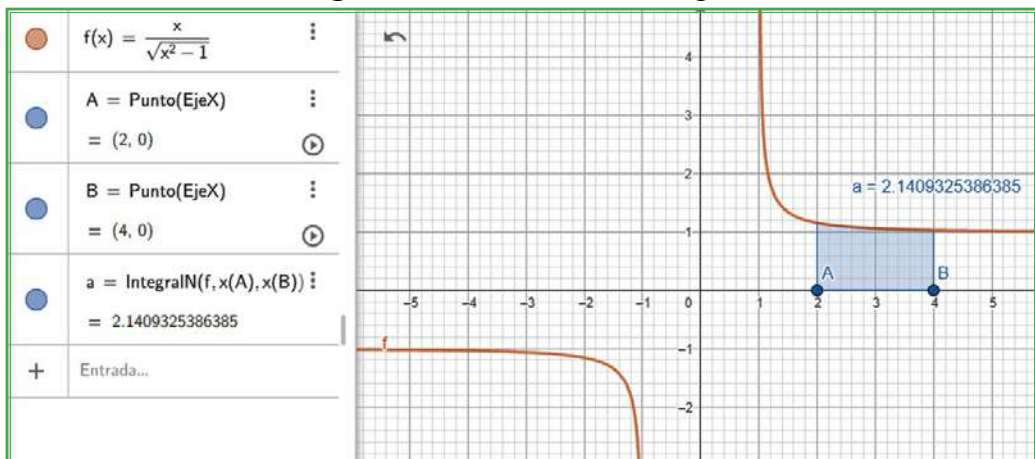
```

$$\begin{aligned}
 2.3.42. \quad & \int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \\
 &= \int_2^4 \frac{1}{2\sqrt{u}} du \\
 &= \frac{1}{2} * \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{u}} du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[2u^{\frac{1}{2}} \right]_2^4 \\
 &= \frac{1}{2} \left[2\sqrt{u} \right]_2^4 \\
 &= \frac{1}{2} (2\sqrt{15} - 2\sqrt{3}) \\
 &= \sqrt{15} - \sqrt{3} \\
 &= 2,1409 u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.86. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from sympy import symbols, sqrt, integrate

# Definir las variables simbólicas
x = symbols('x')

# Definir la función
funcion = x / sqrt(x**2 - 1)

# Calcular la integral definida
integral = integrate(funcion, (x, 2, 4))

# Evaluar el resultado numérico aproximado

```

```

resultado_numerico = integral.evalf()

# Imprimir el resultado numérico

print("El valor numérico de la integral es:", resultado_numerico)

```

Figura 2.87. Análisis 46

```

from sympy import symbols, sqrt, integrate
# Definir las variables simbólicas
x = symbols('x')
# Definir la función
funcion = x / sqrt(x**2 - 1)
# Calcular la integral definida
integral = integrate(funcion, (x, 2, 4))
# Evaluar el resultado numérico aproximado
resultado_numerico = integral.evalf()
# Imprimir el resultado numérico
print("El valor numérico de la integral es:", resultado_numerico)

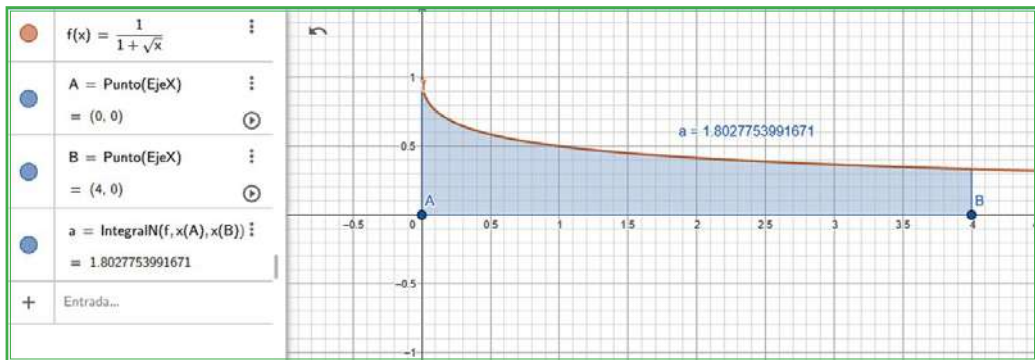
El valor numérico de la integral es: 2.14093253863854

```

$$\begin{aligned}
 \text{2.3.43. } \int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx &= \int_0^4 \frac{2(u-1)}{u} du \\
 &= 2 \int_0^4 \frac{u-1}{u} du \\
 &= 2 \int_0^4 1 - \frac{1}{u} du \\
 &= 2 \left(\int_0^4 1 du - \int_0^4 \frac{1}{u} du \right) \\
 \int_0^4 1 du &= 2 \\
 \int_0^4 \frac{1}{u} du &= \ln(3) \\
 &= 2(2 - \ln(3)) \\
 &= 1,80277 u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.88. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from sympy.functions.elementary.miscellaneous import sqrt
# Definir la función a integrar
def f(x):
    return 1 / (1 + sqrt(x))
# Definir los límites de integración
limite_inferior = 0
limite_superior = 4
# Definir el número de subintervalos para aproximar la integral
num_subintervalos = 1000
# Calcular el ancho de cada subintervalo
ancho_subintervalo = (limite_superior - limite_inferior) / num_subintervalos
# Inicializar la suma de los valores de la función en los extremos
suma = f(limite_inferior) + f(limite_superior)
# Calcular la suma de los valores de la función en los puntos interiores
for i in range(1, num_subintervalos):
    x = limite_inferior + i * ancho_subintervalo

```

```

suma += 2 * f(x)

# Calcular la aproximación de la integral

resultado = (ancho_subintervalo / 2) * suma

# Imprimir el resultado

print("El resultado de la integral definida es:", resultado)

```

Figura 2.89. Análisis 47

```

from sympy.functions.elementary.miscellaneous import sqrt
# Definir la función a integrar
def f(x):
    return 1 / (1 + sqrt(x))
# Definir los límites de integración
limite_inferior = 0
limite_superior = 4
# Definir el número de subintervalos para aproximar la integral
num_subintervalos = 1000
# Calcular el ancho de cada subintervalo
ancho_subintervalo = (limite_superior - limite_inferior) / num_subintervalos
# Inicializar la suma de los valores de la función en los extremos
suma = f(limite_inferior) + f(limite_superior)
# Calcular la suma de los valores de la función en los puntos interiores
for i in range(1, num_subintervalos):
    x = limite_inferior + i * ancho_subintervalo
    suma += 2 * f(x)
# Calcular la aproximación de la integral
resultado = (ancho_subintervalo / 2) * suma
# Imprimir el resultado
print("El resultado de la integral definida es:", resultado)

El resultado de la integral definida es: 1.80282666956742

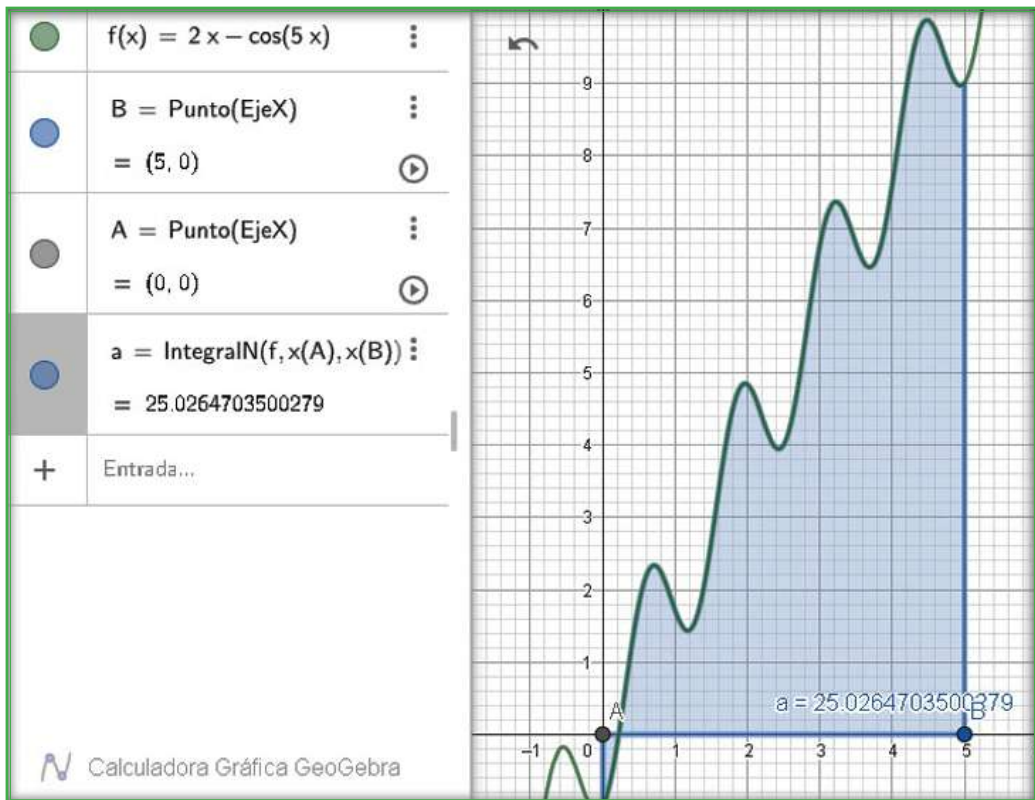
```

$$\begin{aligned}
 2.3.44. \quad & \int_0^5 2x - \cos(5x) \, dx \\
 &= \int_0^5 2x - \cos(5x) \, dx \\
 &= \int_0^5 2x \, dx - \int_0^5 \cos(5x) \, dx \\
 &= x^2 - \frac{\sin(5x)}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(x^2 - \frac{\text{sen}(5x)}{5} \right) \Big|_0^5 \\
 &= \left(5^2 - \frac{\text{sen}(5 \cdot 5)}{5} \right) - \left(0^2 - \frac{\text{sen}(5 \cdot 0)}{5} \right) \\
 &= 25 - \frac{\text{sen}(25)}{5} \\
 &= 25,02647 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.90. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
from sympy import symbols, integrate, cos
```

```
# Definir la variable simbólica
```

```

x = symbols('x')

# Definir la función

funcion = 2*x - cos(5*x)

# Calcular la integral definida y obtener el resultado numérico

integral = integrate(funcion, (x, 0, 5)).evalf()

# Imprimir el resultado

print("El valor numérico de la integral es:", integral)
    
```

Figura 2.91. Análisis 48

```

from sympy import symbols, integrate, cos
# Definir la variable simbólica
x = symbols('x')
# Definir la función
funcion = 2*x - cos(5*x)
# Calcular la integral definida y obtener el resultado numérico
integral = integrate(funcion, (x, 0, 5)).evalf()
# Imprimir el resultado
print("El valor numérico de la integral es:", integral)

El valor numérico de la integral es: 25.0264703500196
    
```

$$2.3.45. \int_1^6 \ln 5x - \cos(6x) \, dx$$

$$= \int \ln(5) + \ln(x) - \cos(6x) \, dx$$

$$= \int \ln(5) \, dx + \int \ln(x) \, dx - \int \cos(6x) \, dx$$

$$= \ln(5)x + \ln(x)x - x - \frac{\text{sen}(6x)}{6} \Big|_1^6$$

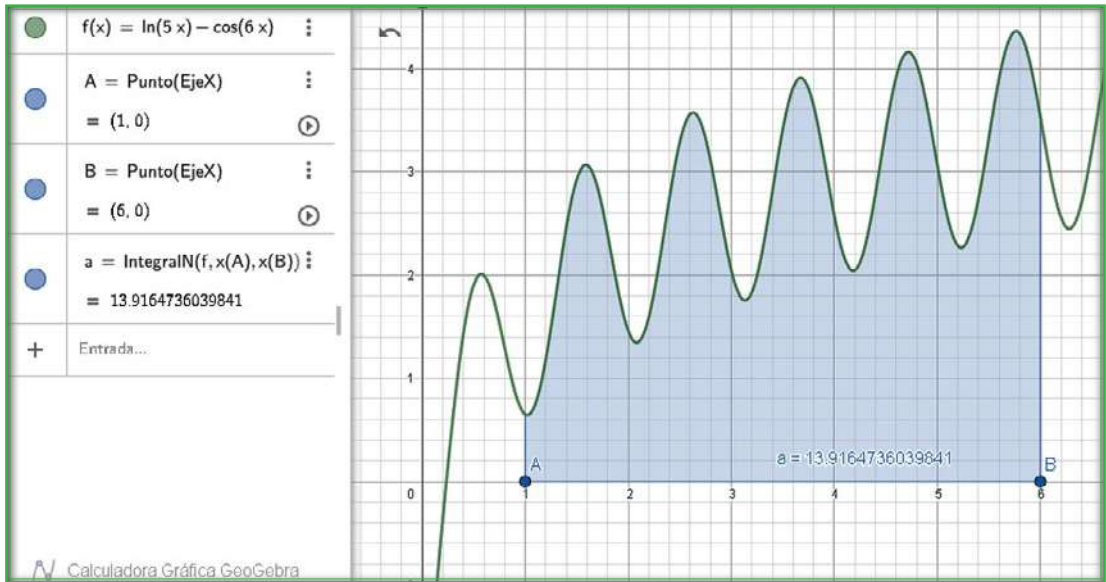
$$= \ln(5)6 + \ln(6) \cdot 6 - 6 - \frac{\text{sen}(6 \cdot 6)}{6} - \left(\ln(5)1 + \ln(1) \cdot 1 - 1 - \frac{\text{sen}(6 \cdot 1)}{6} \right)$$

$$= \ln(145800000) - 5 + \frac{-\text{sen}(36) + \text{sen}(6)}{6}$$

$$= 13,91647 \, u^2$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.92. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from sympy import symbols, integrate, ln, cos
x = symbols('x')
expr = ln(5*x) - cos(6*x)
integral = integrate(expr, x)
a = 1 # Límite inferior
b = 6 # Límite superior
result = integral.subs(x, b).evalf() - integral.subs(x, a).evalf()
print("El valor de la integral definida es:", result)

```

Figura 2.93. Análisis 49

```

from sympy import symbols, integrate, ln, cos
x = symbols('x')
expr = ln(5*x) - cos(6*x)
integral = integrate(expr, x)
a = 1 # Límite inferior
b = 6 # Límite superior
result = integral.subs(x, b).evalf() - integral.subs(x, a).evalf()
print("El valor de la integral definida es:", result)

El valor de la integral definida es: 13.9164736034129

```

2.3.46. $\int_{0,5}^8 \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

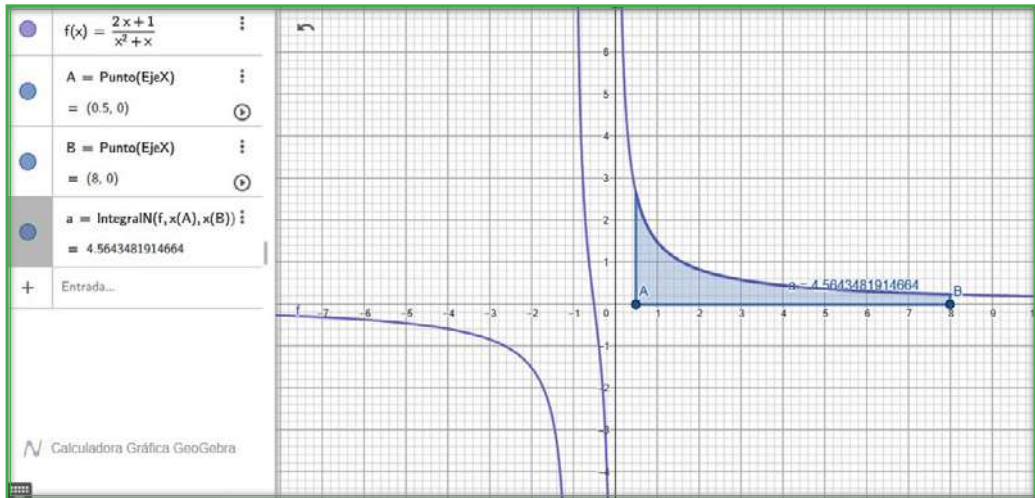
$$\begin{aligned}
 & \int_{0,5}^8 \frac{2x+1}{x(x+1)} dx \\
 &= \int_{0,5}^8 \frac{A}{x} dx + \int_{0,5}^8 B dx \\
 &= \frac{2x+1}{x(x+1)} \\
 &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \\
 &= 2x+1 \\
 &= A(x+1) + B \cdot x \\
 &x=0 \rightarrow 1=A \\
 &x=-1 \rightarrow -1=-B
 \end{aligned}$$

Resolución de la integral:

$$\begin{aligned}
 & \int_{0,5}^8 \frac{2x+1}{x^2+x} dx \\
 &= \int_{0,5}^8 \frac{1}{x^2} dx + \int_{0,5}^8 \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \ln(x) + \ln(x+1) \Big|_{0,5}^8 \\
 &= [\ln(8) + \ln(8+1) - \ln(0,5) + \ln(0,5+1)] \\
 &= 4,564348 u^2
 \end{aligned}$$

Nota: u^2 significa unidades al cuadrado del tipo que se empleen en la función.

Figura 2.94. Gráfica de la integral



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```

from scipy.integrate import quad

# Definir la función que se desea integrar
def f(x):
    return (2*x + 1)/(x**2 + x)

# Definir los límites de integración
a = 1/2
b = 8

# Calcular la integral definida
resultado, error = quad(f, a, b)

# Imprimir el resultado
print(resultado)

```

Figura 2.95. Análisis 50

```

from scipy.integrate import quad
# Definir la función que se desea integrar
def f(x):
    return (2*x +1)/(x**2 + x )
# Definir los límites de integración
a = 1/2
b = 8
# Calcular la integral definida
resultado, error = quad(f, a, b)
# Imprimir el resultado
print(resultado)

4.564348191467837

```

2.4. EJERCICIOS DE INTEGRALES INDEFINIDAS

Enhanced (2020) considera que integrar es el proceso recíproco del de derivar, es decir, dada una función $f(x)$, se trata de buscar aquellas funciones $F(x)$ que, al ser derivadas, conducen a $f(x)$.

Integral indefinida

Se dice, entonces, que $F(x)$ es una primitiva o antiderivada de $f(x)$; dicho de otro modo, las primitivas de $f(x)$ son las funciones derivables $F(x)$ tales que:

$$F'(x) = f(x).$$

Si una función $f(x)$ tiene primitiva, entonces tiene infinitas primitivas, diferenciándose todas ellas en una constante.

$$[F(x) + C]' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$$

Integral indefinida

Integral indefinida es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función (Enhanced, 2020).

Se representa por $\int f(x) dx$.

Se lee: integral de x diferencial de x.

$\int$ es el signo de integración.

$f(x)$ es el integrando o función a integrar.

dx es diferencial x, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

C es la constante de integración y puede tomar cualquier valor numérico real.

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ se tiene que:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Para comprobar que la primitiva de una función es correcta, basta con derivar.

Propiedad de linealidad, la integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de esas funciones.

Propiedades de la integral indefinida.

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

A continuación, se presentan ejercicios de integrales indefinidas con el objetivo de que los estudiantes puedan adquirir destrezas en su proceso de aprendizaje:

Ejercicios de integrales indefinidas

$$2.4.1. \int (4x^3 + 3x^2) dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + C \\ &= x^4 + x^3 + C \end{aligned}$$

$$2.4.2. \int \frac{4x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 8}}$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
 u &= x^3 + 8 \\
 du &= 3x^2 dx \\
 \frac{du}{3} &= x^2 dx \\
 &= \int \frac{4 \frac{du}{3}}{\sqrt{u}} \\
 &= \frac{4}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\
 &= \frac{4}{3} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\
 &= \frac{4}{3} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \\
 &= \frac{8}{3} u^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{8}{3} \sqrt{u} \\
 \text{Respuesta:} \quad &= \frac{8}{3} \sqrt{x^3 + 8} + C
 \end{aligned}$$

$$2.4.3. \int \frac{x^2}{x^3 - 2} dx$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
 u &= x^3 - 2 \\
 du &= 3x^2 dx \\
 \frac{du}{3} &= x^2 dx \\
 &= \int \frac{du}{3u} \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} \\
 &= \frac{1}{3} \ln(u) + C
 \end{aligned}$$

Respuesta:

$$= \frac{1}{3} \ln(x^3 - 2) + C$$

$$\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{1 + x^2}} dx$$

Resolución:

$$u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$du = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$du = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$du = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1})} dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

Transformamos la fracción en el producto de dos fracciones:

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{1 + x^2}} dx \\ &= \int \sqrt{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx \end{aligned}$$

Sustituimos:

$$= \int \sqrt{u} du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}} du$$

Reemplazamos:

$$\begin{aligned} &= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Respuesta:

$$= \frac{2}{3} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

$$2.4.4. \int \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x(x+1)} dx$$

Resolución:

$$\int \ln(x+1) - \ln x \cdot \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$u = \ln(x+1) - \ln x$$

$$du = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} dx$$

$$du = x - \frac{x+1}{x(x+1)} dx$$

$$du = -\frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$-du = \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$= \int u(-du)$$

$$= - \int u(du)$$

$$= -\frac{u^2}{2} + C$$

Respuesta:

$$= \frac{-(\ln(x+1) - \ln x)^2}{2} + C$$

$$2.4.5. \int \frac{e^{5x}}{e^{7x}} dx$$

Resolución:

$$\int e^{-2x} dx$$

$$u = e^{-2x}$$

$$\frac{du}{e^{-2x}(-2)} = dx$$

$$= \int e^{-2x} \cdot \frac{du}{e^{-2x}(-2)}$$

$$= -\frac{1}{2} u + C$$

Respuesta:

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$2.4.6. \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

Racionalizamos y separamos la función:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}} dx$$

Simplificamos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Aplicamos las fórmulas de integración a cada una de las integrales:

Esta es una integral estándar que se utiliza una fórmula directa:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arcsin(x)$$

Esta integral la realizamos una sustitución trigonométrica:

Sustituimos

$$x = \tan(u)$$

$$u = \arctan(x)$$

$$dx = \sec^2(u) du$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sec^2(u)}{\sqrt{1+\tan^2(u)}}$$

Simplificamos la función de la integral aplicando las identidades trigonométricas:

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$$

$$\int \sec(u) du$$

Ampliamos la fracción por $\tan(u) + \sec(u)$

$$\int \frac{\sec(u) \tan(u) + \sec(u)}{\tan(u) + \sec(u)} du$$

Expandimos:

$$\int \frac{\sec(u) \tan(u) + \sec^2(u)}{\tan(u) + \sec(u)} du$$

Sustituimos:

$$v = \tan(u) + \sec(u)$$

$$\frac{dv}{du} = \sec(u) \tan(u) + \sec^2(u)$$

$$du = \frac{1}{\sec(u) \tan(u) + \sec^2(u)} dv$$

$$= \int \frac{1}{v} dv$$

Es una integral estándar donde utilizamos la fórmula:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$= \ln|v|$$

Reemplazamos $v = (\tan(u) + \sec(u))$

$$\ln(\tan(u) + \sec(u))$$

Reemplazamos $u = \arctan(x)$

$$\ln(\tan(\arctan(x)) + \sec(\arctan(x)))$$

Donde:

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

$$\sec(\arctan(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Nos quedaría:

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

La respuesta de la integral sería:

$$= \arcsin(x) + \ln\left(\left|\sqrt{1+x^2} + x\right|\right) + C$$

$$2.4.7. \int (2^x + 3^x)^2 dx$$

Separamos la integral:

$$\begin{aligned} & \int 2^{2x} dx + 2 \int 2^x \cdot 3^x dx + \int 3^{2x} dx \\ & \int 2^{2x} dx + 2 \int 6^x dx + \int 3^{2x} dx \end{aligned}$$

Aplicamos las fórmulas de integrales a cada una:

$$\begin{aligned} \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln|a|} + C \\ \int 2^{2x} dx &= \frac{2^{2x}}{2\ln|2|} + C \\ \int 6^x dx &= \frac{6^x}{\ln|6|} + C \\ \int 3^{2x} dx &= \frac{3^{2x}}{2\ln|3|} + C \end{aligned}$$

La integral resuelta sería:

$$= \frac{4^x}{\ln|2|} + 2 \frac{6^x}{\ln|6|} + \frac{9^x}{2\ln|3|} + C$$

$$2.4.8. \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$$

Separamos la función en dos integrales:

$$\begin{aligned} & \int \frac{2^{x+1}}{10^x} - \frac{5^{x-1}}{10^x} dx \\ & \int \frac{2^{x+1}}{10^x} dx - \int \frac{5^{x-1}}{10^x} dx \end{aligned}$$

Aplicamos la linealidad:

$$2 \int \frac{2^x}{10^x} dx - \frac{1}{5} \int \frac{5^x}{10^x} dx$$

Resolvemos cada integral:

$$\int \frac{2^x}{10^x} dx$$

$$\int \frac{1}{5^x} dx$$

Sustituimos:

$$u = -x$$

$$\frac{du}{dx} = -1$$

$$dx = -du$$

Donde nos quedará:

$$-\int 5^u du$$

Resolviendo la integral:

$$\int 5^u du$$

Aplicamos la fórmula de integración:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + C$$

$$= \frac{5^u}{\ln(5)}$$

Reemplazamos las integrales ya resueltas:

$$-\int 5^u du$$

$$= -\frac{5^u}{\ln(5)}$$

Reemplazamos la sustitución $u = -x$

$$= -\frac{1}{\ln(5) \cdot 5^x}$$

$$\int \frac{5^x}{10^x} dx$$

Combinamos exponenciales:

$$\int \frac{1}{2^x} dx$$

Sustituimos:

$$u = -x$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= -1 \\ dx &= -du\end{aligned}$$

Donde nos quedará:

$$= - \int 2^u du$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}\int 2^u du \\ = \frac{2^u}{\ln(2)}\end{aligned}$$

Reemplazamos las integrales ya resueltas:

$$\begin{aligned}- \int 2^u du \\ = - \frac{2^u}{\ln(x)}\end{aligned}$$

Reemplazamos $u = -x$

$$= - \frac{1}{\ln(2) \cdot 2^x}$$

Reemplazamos en las integrales resueltas:

$$\begin{aligned}2 \int \frac{2^x}{10^x} dx - \frac{1}{5} \int \frac{5^x}{10^x} dx \\ = \frac{1}{5 \ln(2) \cdot 2^x} - \frac{2}{\ln(5) \cdot 5^x} \\ \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx\end{aligned}$$

Respuesta:

$$= \frac{1}{5 \ln(2) \cdot 2^x} - \frac{2}{\ln(5) \cdot 5^x} + C$$

$$\mathbf{2.4.9. \int \left(\frac{2}{1-x} + \frac{(\ln x)^2}{x} \right) dx}$$

Resolución:

$$= \int \frac{2}{1-x} dx + \int \frac{(\ln x)^2}{1} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x & w &= \ln x \\ du &= -dx & dw &= \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

$$-du = dx$$

$$= 2 \int -\frac{du}{u} + \int w^2 dw$$

$$= -2 \int \frac{dw}{u} + \int w^2 dw$$

$$= -2 \ln|w| + \frac{w^3}{3} + C$$

Respuesta:

$$= -2 \ln|1 - x| + \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

2.4.10. $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{1 + x^2}} dx$

Resolución:

$$u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$du = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$du = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$du = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1})} dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

Transformamos la fracción en el producto de dos fracciones:

$$\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{1 + x^2}} dx$$

$$= \int \sqrt{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

Sustituimos:

$$\begin{aligned} &= \int \sqrt{u} du \\ &= \int u^{\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

Reemplazamos:

$$\begin{aligned} &= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Respuesta:

$$= \frac{2}{3} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

2.4.11. $\int \cot^2 x \, dx$

Resolución por medio de identidades trigonométricas/hiperbólicas:

$$\begin{aligned} \cot^2 x &= \csc^2 x - 1 \\ \int (\csc^2(x) - 1) \, dx \end{aligned}$$

Aplicamos la linealidad:

$$\int \csc^2(x) dx - \int 1 \, dx$$

Resolvemos las integrales:

$$\int \csc^2(x) \, dx$$

Utilizamos la fórmula de integrales trigonométricas:

$$\begin{aligned} \int \csc^2(u) du &= -\cot(u) + C \\ &= -\cot(x) \\ \int 1 \, dx &= x \end{aligned}$$

Reemplazamos en las integrales ya resueltas:

$$\begin{aligned}\int \csc^2(x) dx - \int 1 dx \\ = -\cot(x) - x\end{aligned}$$

La respuesta a la integral sería:

$$= -\cot(x) - x + C$$

2.4.12. $\int \frac{dx}{x+a}$

Resolución:

Sustituimos donde:

$$u = x + a$$

$$du = dx$$

Donde nos queda:

$$\int \frac{1}{u} dx$$

Es una integral estándar; entonces, utilizamos la fórmula de integración:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Reemplazamos u:

$$\ln(x + a)$$

La respuesta de la integral sería:

$$\ln(|x + a|) + C$$

2.4.13. $\int (2x - 3)^{10} dx$

Resolución:

Sustituimos:

$$u = 2x - 3$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$dx = \frac{1}{2}$$

Donde nos queda:

$$= \frac{1}{2} \int u^{10} du$$

Resolvemos la integral:

$$\int u^{10} du$$

Utilizamos la fórmula de integración:

$$\begin{aligned} \int u^n du &= \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; \forall n \neq -1 \text{ regla de la potencia.} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{11}}{11} \\ &= \frac{u^{11}}{22} \end{aligned}$$

Reemplazamos $u = 2x - 3$:

$$= \frac{(2x - 3)^{11}}{22}$$

Le respuesta de la integral sería:

$$= \frac{(2x - 3)^{11}}{22} + C$$

2.4.14. $\int \sqrt[3]{1 - 3x} dx$

Resolución:

Sustituimos:

$$u = 1 - 3x$$

$$\frac{du}{dx} = -3$$

$$dx = -\frac{1}{3}$$

Donde nos quedará:

$$= -\frac{1}{3} \int \sqrt[3]{u} \, du$$

Resolvemos la integral:

$$\int \sqrt[3]{u} \, du$$

Utilizamos la fórmula de integración:

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; \forall n \neq -1 \text{ regla de la potencia.}$$

$$\begin{aligned} & \int u^{\frac{1}{3}} \, du \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3u^{\frac{4}{3}}}{4} \\ &= -\frac{u^{\frac{4}{3}}}{4} \end{aligned}$$

Reemplazamos $u = 1 - 3x$:

$$= -\frac{(1 - 3x)^{\frac{4}{3}}}{4}$$

Le respuesta de la integral sería:

$$= \frac{(1 - 3x)^{\frac{4}{3}}}{4} + C$$

2.4.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$

Resolución:

Sustituimos:

$$u = 2 - 5x$$

$$\frac{du}{dx} = -5$$

$$dx = -\frac{1}{5}$$

Donde nos queda:

$$= -\frac{1}{5} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

Resolvemos la integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

Aplicamos la fórmula de integración:

$$\begin{aligned} \int u^n du &= \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; \forall n \neq -1 \text{ regla de la potencia.} \\ &= -\frac{1}{5} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{5} \cdot 2\sqrt{u} \end{aligned}$$

Reemplazamos $u = 2 - 5x$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2\sqrt{u}}{5} \\ &= -\frac{2\sqrt{2-5x}}{5} \end{aligned}$$

La respuesta de la integral sería:

$$= -\frac{2\sqrt{2-5x}}{5} + C$$

2.4.16. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$

Resolución:

Sustituimos:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{2}} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ &= \int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{2u^2+2}} du \end{aligned}$$

Simplificamos:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2+1} du$$

Resolvemos la integral por medio de la fórmula de integración:

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan(u) + C$$

$$= \arctan(u)$$

Reemplazamos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \cdot \arctan(u)$$

$$= \frac{\arctan(u)}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

La respuesta de la integral sería:

$$= \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{6}} + C$$

2.4.17. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Resolución:

Sustituimos:

$$u = 1 - x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

$$dx = -\frac{1}{2x}$$

Donde nos queda:

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

Resolviendo la integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

Aplicamos la fórmula de integración:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; \forall n \neq -1 \text{ regla de la potencia.}$$

$$n = -\frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{u}$$

Reemplazamos:

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$= -\sqrt{u}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}$$

La respuesta de la integral sería:

$$= -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\mathbf{2.4.18. \int \text{sen}(5x) - \text{sen}(5\alpha) dx}$$

Resolución:

Aplicamos la linealidad:

$$= \int \text{sen}(5x) dx - \text{sen}(5\alpha) \int 1 dx$$

Resolvemos la integral:

$$\int \text{sen}(5x) dx$$

$$u = 5x \quad du = 5dx$$

Donde nos queda:

$$= \frac{1}{5} \int \text{sen}(u) du$$

Resolvemos la integral:

$$\int \text{sen}(u) du$$

Aplicando la fórmula de integración:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(u) du &= -\cos(u) + C \\ &= -\cos(u)\end{aligned}$$

Reemplazamos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} \int \operatorname{sen}(u) du \\ -\frac{1}{5} \cos(5x)\end{aligned}$$

Resolvemos la integral:

$$\int 1 dx$$

Aplicamos la fórmula de integración:

$$= x$$

La respuesta de la integral sería:

$$= \frac{1}{5} \cos(5x) - \operatorname{sen}(5x) x + C$$

2.4.19. $\int \frac{dx}{1 + \cos(x)}$

Resolución:

Simplificamos usando las identidades trigonométricas/hiperbólicas:

$$= \int \frac{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2} dx$$

Sustituimos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{x}{2} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{2} \\ dx &= 2\end{aligned}$$

Donde nos queda:

$$= \int \sec^2(u) du$$

Aplicamos la fórmula de integración:

$$\begin{aligned}\int \sec^2(u) du &= \tan(u) + C \\ &= \tan(u)\end{aligned}$$

Reemplazamos:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

La respuesta de la integral sería:

$$= \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

2.4.20. $\int \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2}$

Resolución:

Sustituimos:

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{x} \\ \frac{du}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \\ dx &= -x^2\end{aligned}$$

Donde nos queda:

$$- \int \text{sen}(u) du$$

Resolvemos la integral:

$$\int \text{sen}(u) du$$

Aplicamos la fórmula de integración:

$$\begin{aligned}\int \text{sen}(u) du &= -\cos(u) + C \\ &= -\cos(u)\end{aligned}$$

Reemplazamos:

$$\begin{aligned}&- \int \text{sen}(u) du \\ &= \cos(u) \\ &= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

La respuesta de la integral es:

$$2.4.21. \int \frac{x dx}{3 - 2x^2}$$

Resolución:

Sustituimos:

$$u = 3 - 2x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -4x$$

$$dx = -\frac{1}{4x}$$

Donde nos queda:

$$-\frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du$$

Resolviendo la integral:

$$\int \frac{1}{u} du$$

Aplicamos la fórmula de integración:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln|u|$$

Reemplazamos:

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du$$

$$= -\frac{\ln|u|}{4}$$

$$= -\frac{\ln|3 - 2x^2|}{4}$$

La respuesta de la integral sería:

$$= -\frac{1}{4} \ln(|3 - 2x^2|) + C$$

$$2.4.22. \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$$

Resolución:

$$u = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{1}{2x}$$

Donde nos queda:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du$$

Resolviendo la integral:

$$\int \frac{1}{u^2} du$$

Aplicamos la regla de integración:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; \forall n \neq -1 \text{ regla de la potencia.}$$

$$n = -2$$

$$= -\frac{1}{u}$$

Reemplazamos:

$$\frac{1}{u} \int \frac{1}{u^2} du$$

$$= -\frac{1}{2u}$$

$$= -\frac{1}{2(x^2 + 1)}$$

La respuesta de la integral sería:

$$= -\frac{1}{2(x^2 + 1)} + C$$

$$2.4.23. \int \frac{x dx}{4 + x^4}$$

Resolución:

Sustituimos:

$$u = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$dx = \frac{1}{x}$$

Donde nos queda:

$$= \int \frac{1}{4u^2 + 4} du$$

Simplificamos:

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

Resolvemos la integral:

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

Aplicamos la fórmula de integración:

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan(u) + C$$

$$= \arctan(u)$$

Reemplazamos:

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

La respuesta de la integral es:

$$= \frac{\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)}{4} + C$$

CAPÍTULO III

3.1. EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN

3.2. CÓDIGO PARA CALCULAR EL PESO DE UN AVIÓN

Sabiendo que la masa del avión es 50 000 kg y de gravedad 9,8 m/s^2 , se realizara el cálculo del peso del avión.

Figura 3.1. Peso del avión

```
def calcular_peso_avion(masa, aceleracion_gravedad):  
    peso = masa * aceleracion_gravedad  
    return peso  
  
# Ejemplo de uso  
masa_avion = 50000 # en kilogramos  
aceleracion_gravedad = 9.8 # en metros por segundo al cuadrado  
  
peso_avion = calcular_peso_avion(masa_avion, aceleracion_gravedad)  
print("El peso del avión es:", peso_avion, "newtons")
```



El peso del avión es: 490000.000000000006 newtons

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
def calcular_peso_avion(masa, aceleracion_gravedad):  
    peso = masa * aceleracion_gravedad  
    return peso  
  
# Ejemplo de uso  
masa_avion = 50000 # en kilogramos  
aceleracion_gravedad = 9.8 # en metros por segundo al cuadrado  
peso_avion = calcular_peso_avion(masa_avion, aceleracion_gravedad)
```

```
print("El peso del avión es:", peso_avion, "newtons")
```

El peso del avión es: 490000 newtons

3.3. CÓDIGO PARA CALCULAR VOLUMEN DE UN CILINDRO

Sabiendo que el radio es de 3,5 y la altura de 10,2, se calculará el volumen del cilindro.

Figura 3.2. Volumen del cilindro

```
import math

def calcular_volumen_cilindro(radio, altura):
    volumen = math.pi * radio**2 * altura
    return volumen

radio = 3.5
altura = 10.2
volumen = calcular_volumen_cilindro(radio, altura)
print("El volumen del cilindro es:", volumen)
```

El volumen del cilindro es: 392.5420020660446

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import math
```

```
def calcular_volumen_cilindro(radio, altura):
```

```
    volumen = math.pi * radio**2 * altura
```

```
    return volumen
```

```
radio = 3.5
```

```
altura = 10.2
```

```
volumen = calcular_volumen_cilindro(radio, altura)
```

```
print("El volumen del cilindro es:", volumen)
```

El volumen del cilindro es: 392.542

3.4. CÓDIGO PARA CALCULAR DETERMINANTE 3X3

Calcular la determinante matriz [5, 6, 9], [4, 2, 7], [1,3,5].

Figura 3.3. Determinante

```
import numpy as np

def calcular_determinante(matriz):
    det = np.linalg.det(matriz)
    return det

# Ejemplo de uso
matriz = np.array([[5, 6, 9], [4, 2, 7], [1, 3, 5]])
determinante = calcular_determinante(matriz)
print("La determinante de la matriz es:", determinante)
```



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import numpy as np

def calcular_determinante(matriz):
    det = np.linalg.det(matriz)
    return det

# Ejemplo de uso
matriz = np.array([[5, 6, 9], [4, 2, 7], [1, 3, 5]])
determinante = calcular_determinante(matriz)
print("La determinante de la matriz es:", determinante)

La determinante de la matriz es: -43
```

3.5. CÓDIGO PARA CALCULAR EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Calcular el área del triángulo sabiendo que su base es 5, y su altura, 6 (se pueden dar otros valores).

Figura 3.4. Área de triángulo rectángulo

```
def calcular_area_triángulo(base, altura):
    área = (base * altura) / 2
    return área

print("Cálculo del área de un triángulo")
base = float(input("Ingresa el valor de la base: "))
altura = float(input("Ingresa el valor de la altura: "))

area = calcular_area_triángulo(base, altura)
print("El área del triángulo es:", área)
```

```

Cálculo del área de un triángulo
Ingresa el valor de la base: 5
Ingresa el valor de la altura: 6
El área del triángulo es: 15.0

```

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
def calcular_area_triángulo(base, altura):

    área = (base * altura) / 2

    return área

print("Cálculo del área de un triángulo")

base = float(input("Ingresa el valor de la base: "))

altura = float(input("Ingresa el valor de la altura: "))

area = calcular_area_triángulo(base, altura)
```

```
print("El área del triángulo es:", área)
```

El área del triángulo es: 15

Nota: en algunos dispositivos, esta programación debe ser eliminada las tildes de las palabras para que pueda correr el programa sin problemas.

3.6. CÓDIGO PARA CALCULAR EL ÁREA DE UNA CIRCUNFERENCIA

Calcular el área de la circunferencia sabiendo que su radio es de 56 (se pueden dar otros valores).

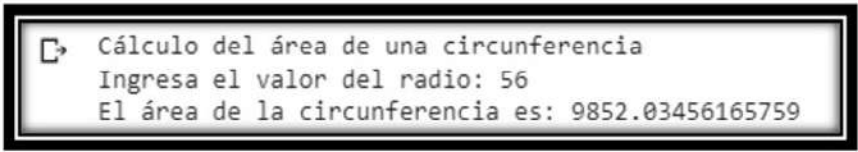
Figura 3.5. Área de la circunferencia

```
import math

def calcular_área_circunferencia(radio):
    área = math.pi * radio**2
    return área

print("Cálculo del área de una circunferencia")
radio = float(input("Ingresa el valor del radio: "))

área = calcular_área_circunferencia(radio)
print("El área de la circunferencia es:", área)
```



PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import math

def calcular_área_circunferencia(radio):

    área = math.pi * radio**2

    return área

print("Cálculo del área de una circunferencia")
```

```
radio = float(input("Ingresa el valor del radio: "))
```

```
área = calcular_área_circunferencia(radio)
```

```
print("El área de la circunferencia es:", área)
```

El área de la circunferencia es: 9852,034

3.7. CÓDIGO PARA CALCULAR EL ÁREA DE UN CUADRADO

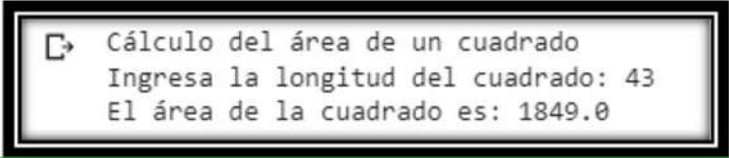
Calcular el área del cuadrado sabiendo que el lado es 43 (se pueden dar otros valores).

Figura 3.6. Área del cuadrado

```
def calcular_área_cuadrado(lado):
    área = lado**2
    return area

print("Cálculo del área de un cuadrado")
lado = float(input("Ingresa la longitud del cuadrado: "))

área = calcular_área_cuadrado(lado)
print("El área de la cuadrado es:", área)
```



```
➞ Cálculo del área de un cuadrado
Ingresa la longitud del cuadrado: 43
El área de la cuadrado es: 1849.0
```

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
def calcular_área_cuadrado(lado):
```

```
    área = lado**2
```

```
    return area
```

```
print("Cálculo del área de un cuadrado")
```

```
lado = float(input("Ingresa la longitud del cuadrado: "))
```

```
área = calcular_área_cuadrado(lado)
```

```
print("El área de la cuadrado es:", área)
```

El área del cuadrado es: 1849.0

3.8. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

$$f(x) = 6x^2 - 3x + 1$$

$$f(x) = 6x^2 - 3x + 1$$

Figura 3.7. Programación para la gráfica cuadrática

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return 6*x**2-3*x+1

x = np.linspace (-10, 10, 100)

y=f(x)

plt.plot(x,y)

plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Grafica de la funcion f(x)= 6*x**2-3*x+1")

plt.show()
```

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):

    return 6*x**2-3*x+1

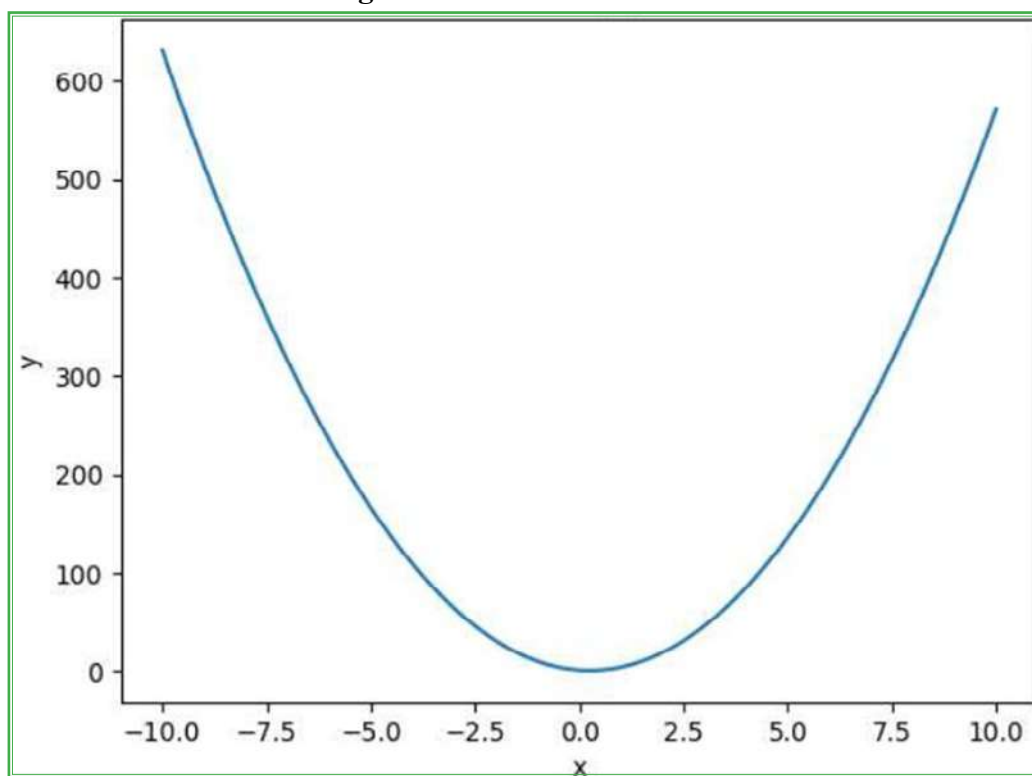
x = np.linspace (-10, 10, 100)
```

```

y=f(x)
plt.plot(x,y)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Grafica de la funcion f(x)= 6*x**2-3*x+1")
plt.show()

```

Figura 3.8. Gráfica cuadrática



3.9. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CÚBICA

$$f(x) = 9x^3 - 4x^2 - x - 1$$

$$f(x)=9x^3-4x^2-x-1$$

Figura 3.9. Programación para la función cúbica

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return 9*x**3-4*x**2-x-1

x = np.linspace (-10, 10, 100)

y=f(x)

plt.plot(x,y)

plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Grafica de la funcion f(x)= 9*x**3-4*x**2-x-1")

plt.show()
```

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):

    return 9*x**3-4*x**2-x-1

x = np.linspace (-10, 10, 100)

y=f(x)

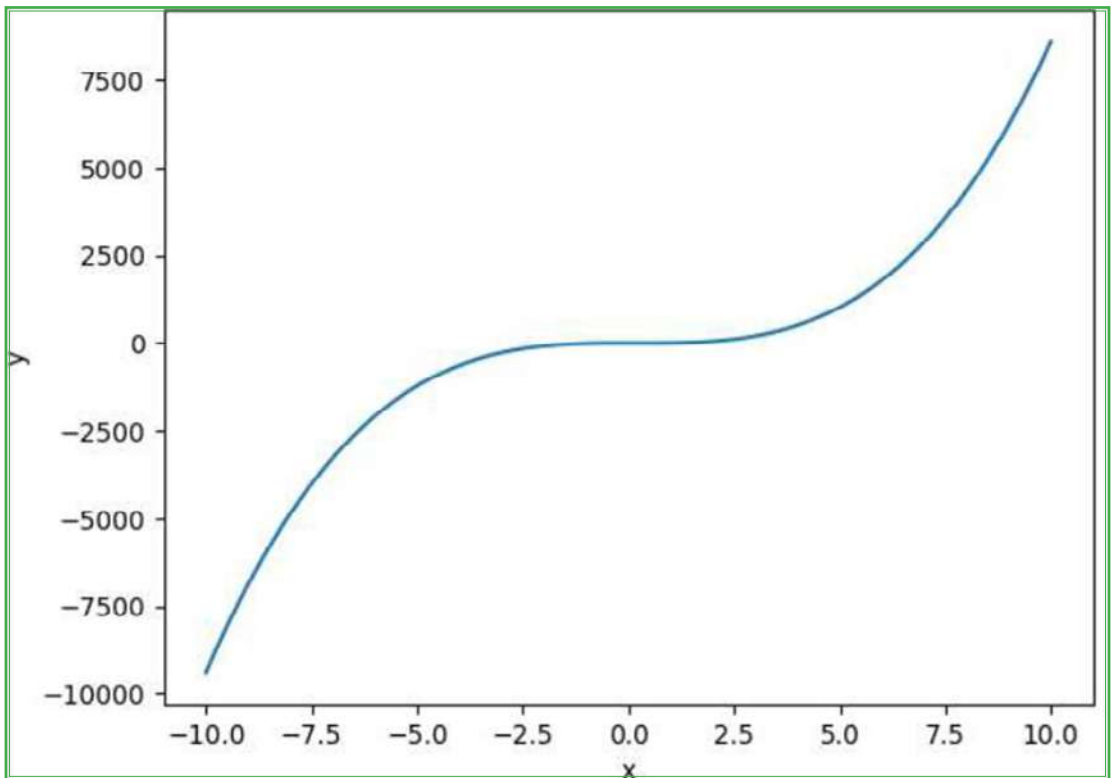
plt.plot(x,y)

plt.xlabel("x")

plt.ylabel("y")

plt.title("Grafica de la funcion f(x)= 9*x**3-4*x**2-x-1")

plt.show()
```

Figura 3.10. Gráfica cúbica

3.10. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME MRU

Calcular la velocidad sabiendo que hay una distancia de 150 metros en un tiempo de 1 hora.

Figura 3.11. Programación de MRU

```
def calcular_distancia(velocidad, tiempo):
    distancia = velocidad * tiempo
    return distancia

# Datos del movimiento
velocidad = 30.0 # m/s
tiempo = 10.0 # segundos

# Calcular distancia
distancia = calcular_distancia(velocidad, tiempo)
print("La distancia recorrida es:", distancia, "metros")
```

```
def calcular_distancia(velocidad, tiempo):
    distancia = velocidad * tiempo
    return distancia

# Datos del movimiento
velocidad = 30.0 # m/s
tiempo = 10.0 # segundos

# Calcular distancia
distancia = calcular_distancia(velocidad, tiempo)
print("La distancia recorrida es:", distancia, "metros")

La distancia recorrida es: 300.0 metros
```

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
def calcular_velocidad(distancia, tiempo):
```

```
    velocidad = distancia / tiempo
```

```
    return velocidad
```

```
# Datos del movimiento
```

```
distancia = 150.0 # metros
```

```
tiempo = 1.0 # hora
```

```
# Convertir tiempo a segundos
tiempo_segundos = tiempo * 3600

# Calcular velocidad
velocidad = calcular_velocidad(distancia, tiempo_segundos)

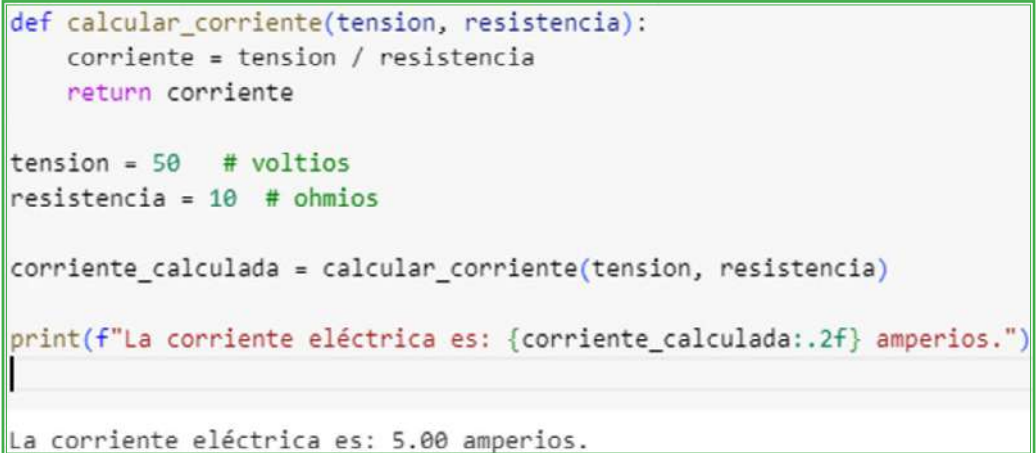
print("La velocidad es:", velocidad, "m/s")

La distancia recorrida es: 300.0 metros
```

3.11. LEY DE OHM

Calcular la corriente eléctrica dado que la resistencia es de $10\ \Omega$ (ohmios) y 50 V (voltios).

Figura 3.12. Programación de la ley de OHM



```
def calcular_corriente(tension, resistencia):
    corriente = tension / resistencia
    return corriente

tension = 50 # voltios
resistencia = 10 # ohmios

corriente_calculada = calcular_corriente(tension, resistencia)

print(f"La corriente eléctrica es: {corriente_calculada:.2f} amperios.")

La corriente eléctrica es: 5.00 amperios.
```

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
def calcular_corriente(tension, resistencia):

    corriente = tension / resistencia

    return corriente

tension = 50 # voltios
```

```
resistencia = 10 # ohmios

corriente_calculada = calcular_corriente(tension, resistencia)

print(f"La corriente eléctrica es: {corriente_calculada:.2f} amperios.")

La corriente eléctrica es: 5.00 amperios.
```

3.12. GRÁFICA DE LA ELIPSE

Graficar la elipse con los siguientes valores.

Valores

a= -10

b= 5

Figura 3.13. Programación para graficar la elipse

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a = float(input("Ingrese el valor del eje mayor (a): "))
b = float(input("Ingrese el valor del eje menor (b): "))

x = np.linspace(-a, a, 1000)
y = b*np.sqrt(1 - (x**2/ a**2))

plt.plot(x,y, color='blue')
plt.plot(x, -y, color='blue')
plt.axis('scaled')
plt.title('Gráfica de la elipse')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.show()
```

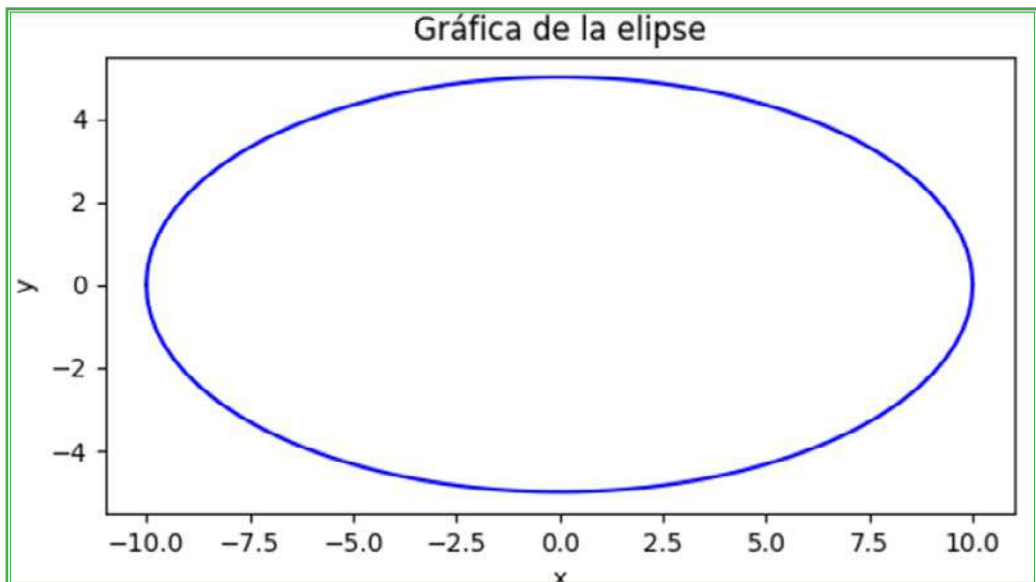
PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt
```

```
a = float(input("Ingrese el valor del eje mayor (a): "))
b = float(input("Ingrese el valor del eje menor (b): "))
x = np.linspace(-a, a, 1000)
y = b*np.sqrt(1 - (x**2/ a**2))
plt.plot(x,y, color='blue')
plt.plot(x, -y, color='blue')
plt.axis('scaled')
plt.title('Gráfica de la elipse')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.show()
```

Figura 3.14. Gráfica de la elipse



3.13. GRÁFICA DE LA HIPÉRBOLA

Graficar la hipérbola con los siguientes valores.

Valores:**a = 5****b = 3****h = 7****K = 2****Figura 3.15.** Programación de la hipérbola

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def plot_hyperbola(a, b, h, k):

    x = np.linspace(h - 3*a, h + 3*a, 500)
    y_pos = k + b * np.sqrt(1 + ((x - h) / a)**2)
    y_neg = k - b * np.sqrt(1 + ((x - h) / a)**2)

    plt.figure(figsize=(8, 6))
    plt.plot(x, y_pos, label='Hipérbola')
    plt.plot(x, y_neg)

    plt.xlim(h - 4*a, h + 4*a)
    plt.ylim(k - 4*b, k + 4*b)
    plt.xlabel('Eje X')
    plt.ylabel('Eje Y')
    plt.title('Gráfico de la Hipérbola')
    plt.legend()

    plt.grid(True)
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.show()

def main():
    print("Gráfico de una hipérbola")
    a = float(input("Ingresa el valor del semieje mayor (a): "))
    b = float(input("Ingresa el valor del semieje menor (b): "))
    h = float(input("Ingresa la coordenada x del centro de la hipérbola (h): "))
    k = float(input("Ingresa la coordenada y del centro de la hipérbola (k): "))

    plot_hyperbola(a, b, h, k)

if __name__ == "__main__":
    main()

```

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

def plot_hyperbola(a, b, h, k):

    x = np.linspace(h - 3*a, h + 3*a, 500)

    y_pos = k + b * np.sqrt(1 + ((x - h) / a)**2)

    y_neg = k - b * np.sqrt(1 + ((x - h) / a)**2)

    plt.figure(figsize=(8, 6))

    plt.plot(x, y_pos, label='Hipérbola')

    plt.plot(x, y_neg)

    plt.xlim(h - 4*a, h + 4*a)

    plt.ylim(k - 4*b, k + 4*b)

    plt.xlabel('Eje X')

    plt.ylabel('Eje Y')

    plt.title('Gráfico de la Hipérbola')

    plt.legend()

    plt.grid(True)

    plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)

    plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)

    plt.show()

def main():

    print("Gráfico de una hipérbola")

    a = float(input("Ingresa el valor del semieje mayor (a): "))

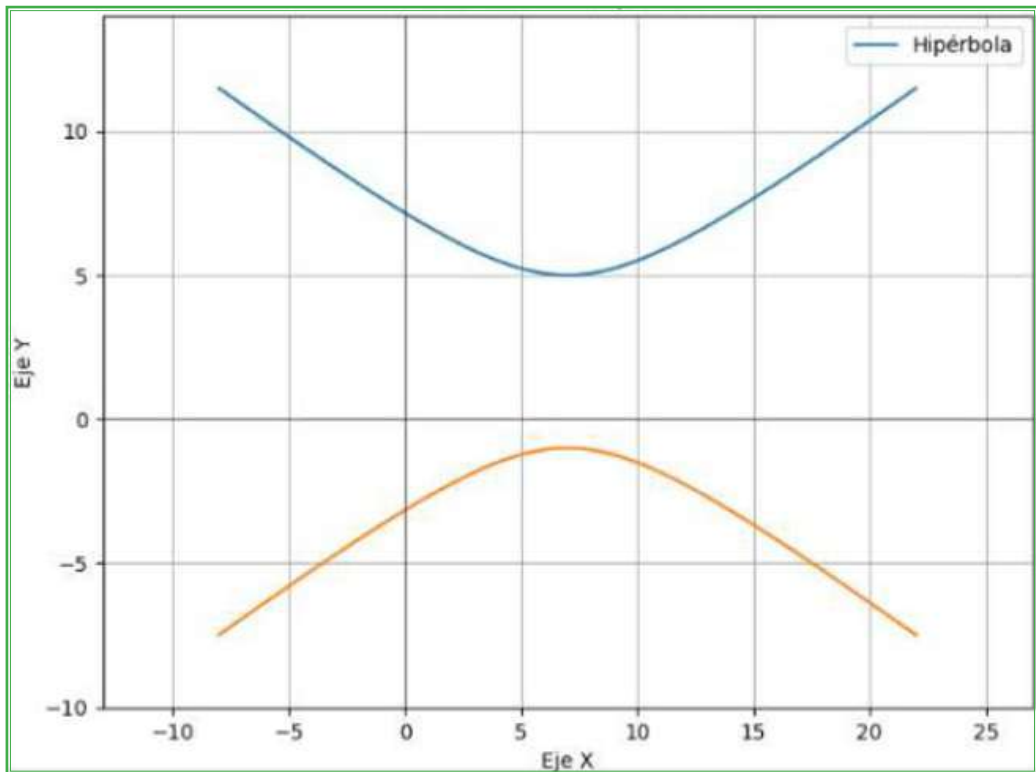
    b = float(input("Ingresa el valor del semieje menor (b): "))
```

```

h = float(input("Ingresa la coordenada x del centro de la hipérbola (h): "))
k = float(input("Ingresa la coordenada y del centro de la hipérbola (k): "))
plot_hyperbola(a, b, h, k)
if __name__ == "__main__":
    main()

```

Figura 3.16. Gráfica de la hipérbola



3.14. GRÁFICA DE LA PARÁBOLA

Graficar la parábola con los siguientes valores.

Valores

a = 3

b = 9

c = 1

Figura 3.17. Programación de la parábola

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def plot_parabola(a, b, c):
    x = np.linspace(-10, 10, 100)

    y = a * x**2 + b * x + c

    plt.figure(figsize=(8, 6))
    plt.plot(x, y)
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.title('Gráfica de una parábola')
    plt.grid(True)
    plt.show()

a = 3
b = 9
c = 1

plot_parabola(a, b, c)
```

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

def plot_parabola(a, b, c):

    x = np.linspace(-10, 10, 100)

    y = a * x**2 + b * x + c

    plt.figure(figsize=(8, 6))

    plt.plot(x, y)

    plt.xlabel('x')
```

```
plt.ylabel('y')
plt.title('Gráfica de una parábola')
plt.grid(True)
plt.show()
a = 3
b = 9
c = 1
plot_parabola(a, b, c)
```

Figura 3.18. Gráfica de la parábola

3.15. GRÁFICA DE LA CIRCUNFERENCIA

Graficar la circunferencia con los siguientes valores.

Valores

$h = 3$ Coordenada x del centro

k = 5 Coordenada y del centro

r = 7 Radio de la circunferencia

Figura 3.19. Programación de la gráfica de la circunferencia

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def plot_circle(h, k, r):
    theta = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
    x = h + r * np.cos(theta)
    y = k + r * np.sin(theta)

    plt.figure(figsize=(8, 8))
    plt.plot(x, y)
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.title('Gráfica de una circunferencia')
    plt.grid(True)
    plt.axis('equal')
    plt.show()

h = 3 # Coordenada x del centro
k = 5 # Coordenada y del centro
r = 7 # Radio de la circunferencia

plot_circle(h, k, r)
```

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

def plot_circle(h, k, r):

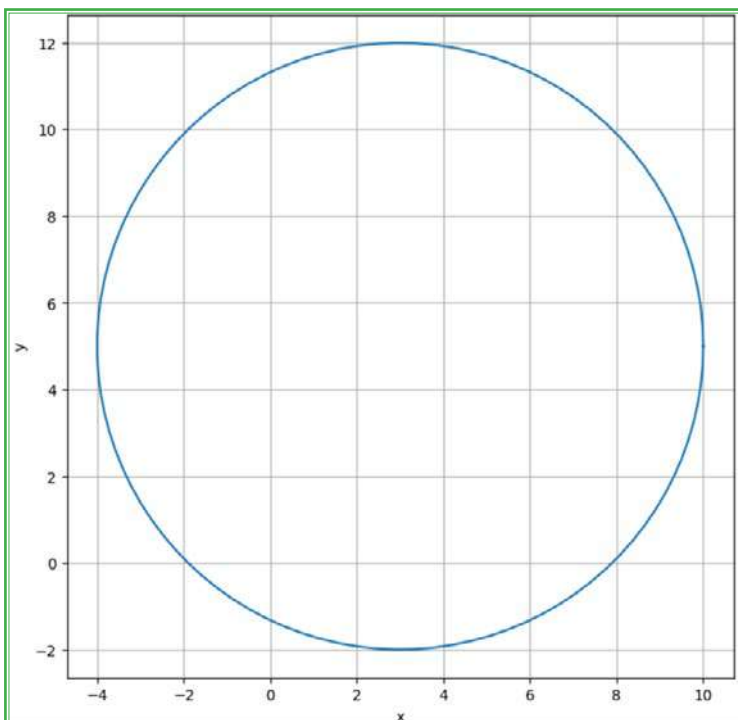
    theta = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)

    x = h + r * np.cos(theta)

    y = k + r * np.sin(theta)
```

```
plt.figure(figsize=(8, 8))  
plt.plot(x, y)  
plt.xlabel('x')  
plt.ylabel('y')  
plt.title('Gráfica de una circunferencia')  
plt.grid(True)  
plt.axis('equal')  
plt.show()  
  
h = 3 # Coordenada x del centro  
k = 5 # Coordenada y del centro  
r = 7 # Radio de la circunferencia  
plot_circle(h, k, r)
```

Figura 3.20. Gráfica de la circunferencia



3.16. MANDALA

Programación para realizar la siguiente mandala.

Figura 3.21. Programación para realizar una mandala

```
import turtle

# Define los colores
colores = ["red", "purple", "blue", "green", "orange", "yellow"]

# Crea la ventana de dibujo
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)

# Dibuja las figuras
for x in range(360):
    t.pencolor(colores[x % 6])
    t.width(x / 100 + 1)
    t.forward(x)
    t.left(59)

# Oculta el cursor al finalizar
turtle.done()
```

PROGRAMACIÓN PYTHON EN GOOGLE COLAB

```
import turtle

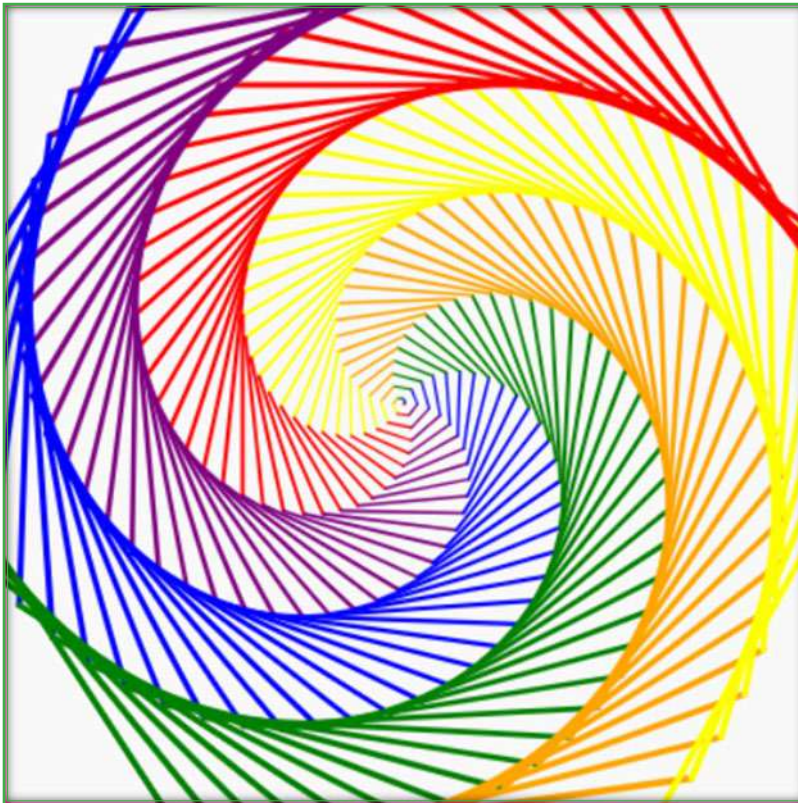
# Define los colores
colores = ["red", "purple", "blue", "green", "orange", "yellow"]

# Crea la ventana de dibujo
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)

# Dibuja las figuras
for x in range(360):
    t.pencolor(colores[x % 6])
```

```
t.width(x / 100 + 1)
t.forward(x)
t.left(59)
# Oculta el cursor al finalizar
turtle.done()
```

Figura 3.22. Gráfica de la mandala



LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Área bajo la curva	8
Figura 1.2. Integral	9
Figura 1.3. Área bajo la curva	10
Figura 1.4. Partes de la integral	10
Figura 1.5. Tipos de integrales	11
Figura 1.6. Integral definida	12
Figura 1.7. Integral indefinida	13
Figura 1.8. Diferencia integral definida - integral indefinida	14
Figura 1.9. Importancia de las fórmulas	14
Figura 2.1. GeoGebra	34
Figura 2.2. Python	35
Figura 2.3. Comandos de Python	36
Figura 2.4. Gráfica de la integral	37
Figura 2.5. Análisis 1	38
Figura 2.6. Gráfica de la integral	39
Figura 2.7. Análisis 2	40
Figura 2.8. Gráfica de la integral	41
Figura 2.9. Análisis 3	42
Figura 2.10. Gráfica de la integral	44
Figura 2.11. Análisis 4	45
Figura 2.12. Gráfica de la integral	47
Figura 2.13. Análisis 5	48
Figura 2.14. Gráfica de la integral	49
Figura 2.15. Análisis 6	50
Figura 2.16. Gráfica de la integral	51

Figura 2.17. Análisis 7	52
Figura 2.18. Gráfica de la integral	53
Figura 2.19. Análisis 8	54
Figura 2.20. Gráfica de la integral	54
Figura 2.21. Análisis 9	55
Figura 2.22. Gráfica de la integral	56
Figura 2.23. Análisis 10	57
Figura 2.24. Gráfica de la integral	58
Figura 2.25. Análisis 11	60
Figura 2.26. Gráfica de la integral	61
Figura 2.27. Análisis 12	62
Figura 2.28. Gráfica de la integral	63
Figura 2.29. Análisis 13	64
Figura 2.30. Gráfica de la integral	65
Figura 2.31. Análisis 14	66
Figura 2.32. Gráfica de la integral	68
Figura 2.33. Análisis 15	69
Figura 2.34. Gráfica de la integral	71
Figura 2.35. Análisis 16	72
Figura 2.36. Gráfica de la integral	73
Figura 2.37. Análisis 17	74
Figura 2.38. Gráfica de la integral	75
Figura 2.39. Análisis 19	76
Figura 2.40. Gráfica de la integral	77
Figura 2.41. Análisis 21	78
Figura 2.42. Gráfica de la integral	79
Figura 2.43. Análisis 22	80

Figura 2.44. Gráfica de la integral	81
Figura 2.45. Análisis 23	82
Figura 2.46. Gráfica de la integral	83
Figura 2.47. Análisis 24	84
Figura 2.48. Gráfica de la integral	85
Figura 2.49. Análisis 25	86
Figura 2.50. Gráfica de la integral	88
Figura 2.51. Análisis 26	89
Figura 2.52. Gráfica de la integral	90
Figura 2.53. Análisis 27	91
Figura 2.54. Gráfica de la integral	92
Figura 2.55. Análisis 29	93
Figura 2.56. Gráfica de la integral	94
Figura 2.57. Análisis 30	95
Figura 2.58. Gráfica de la integral	96
Figura 2.59. Análisis 31	97
Figura 2.60. Gráfica de la integral	98
Figura 2.61. Análisis 33	99
Figura 2.62. Gráfica de la integral	100
Figura 2.63. Análisis 34	101
Figura 2.64. Gráfica de la integral	102
Figura 2.65. Análisis 35	103
Figura 2.66. Gráfica de la integral	104
Figura 2.67. Análisis 36	105
Figura 2.68. Gráfica de la integral	106
Figura 2.69. Análisis 37	107
Figura 2.70. Gráfica de la integral	108

Figura 2.71. Análisis 38	109
Figura 2.72. Gráfica de la integral	110
Figura 2.73. Análisis 39	111
Figura 2.74. Gráfica	112
Figura 2.75. Análisis 40	113
Figura 2.76. Gráfica de la integral	114
Figura 2.77. Análisis 41	115
Figura 2.78. Gráfica de la integral	116
Figura 2.79. Análisis 42	117
Figura 2.80. Gráfica de la integral	118
Figura 2.81. Análisis 43	120
Figura 2.82. Gráfica de la integral	121
Figura 2.83. Análisis 44	122
Figura 2.84. Gráfica de la integral	123
Figura 2.85. Análisis 45	124
Figura 2.86. Gráfica de la integral	125
Figura 2.87. Análisis 46	126
Figura 2.88. Gráfica de la integral	127
Figura 2.89. Análisis 47	128
Figura 2.90. Gráfica de la integral	129
Figura 2.91. Análisis 48	130
Figura 2.92. Gráfica de la integral	131
Figura 2.93. Análisis 49	132
Figura 2.94. Gráfica de la integral	133
Figura 2.95. Análisis 50	134
Figura 3.1. Peso del avión	157
Figura 3.2. Volumen del cilindro	158

Figura 3.3. Determinante	159
Figura 3.4. Área de triángulo rectángulo	160
Figura 3.5. Área de la circunferencia	161
Figura 3.6. Área del cuadrado	162
Figura 3.7. Programación para la gráfica cuadrática	163
Figura 3.8. Gráfica cuadrática	164
Figura 3.9. Programación para la función cúbica	165
Figura 3.10. Gráfica cúbica	166
Figura 3.11. Programación de MRU	167
Figura 3.12. Programación de la ley de OHM	168
Figura 3.13. Programación para graficar la elipse	169
Figura 3.14. Gráfica de la elipse	170
Figura 3.15. Programación de la hipérbola	171
Figura 3.16. Gráfica de la hipérbola	173
Figura 3.17. Programación de la parábola	174
Figura 3.18. Gráfica de la parábola	175
Figura 3.19. Programación de la gráfica de la circunferencia	176
Figura 3.20. Gráfica de la circunferencia	177
Figura 3.21. Programación para realizar una mandala	178
Figura 3.22. Gráfica de la mandala	179

TABLAS

Tabla 1.1 Reglas de interacción	32
---------------------------------------	----

REFERENCIAS

- De los Santos, P. J. (2020). Calculando integrales con Python y SymPy. Numython. <https://numython.github.io/posts/integrales-con-sympy/>
- Didáctico. (2021). ¿Cómo usamos la integración por partes? Superprof. <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/integracion-por-partes.html>
- Disfruta las Matemáticas. (2019, mayo). Reglas de integración. Disfruta las Matemáticas. <https://www.disfrutalasmatematicas.com/calculo/integracion-reglas.html>
- Enhanced. (2020). Enhanced Reader.
- Ferreira, L. H. de S. (2023). A evolução do símbolo de igualdade na História da Matemática e sua importância na reorganização dos conceitos de igualdade na transição da Aritmética para a Álgebra. Tesis, PUC Goiás. <https://repositorio.pucgoias.edu.br/jspui/handle/123456789/6282>
- Funciones. (2021). Integración de funciones.
- García Puch, A., Villatoro Meza, T. y Palacios Sánchez, E. (2021). Guía didáctica. Cálculo integral. Sexto semestre. Gobierno del Estado de Chiapas. <https://www.cobach.edu.mx/doctos/guias-academicas-propedeuticas/calculo-integral.pdf>
- GeoGebra. (2023a). GeoGebra. Aplicaciones matemáticas gratuitas - Usado por más de 100 millones de estudiantes y profesores de todo el mundo. GeoGebra. <https://www.geogebra.org/?lang=es>
- . (2023b). Suite Calculadora. GeoGebra. <https://www.geogebra.org/calculator>
- Google Colab. (2023). Te damos la bienvenida a Colaboratory. Colaboratory. <https://colab.research.google.com/?hl=es#scrollTo=QvQ05BRofl9k>
- Integración. (2020). Métodos de integración.
- Integral. (2021). Integral.

Integrales. (2016). Capítulo 5-Integrales.

Jiménez García, J. G. y Jiménez Izquierdo, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, 4 (7). <https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654>

Khan Academy. (2023). Derivadas: definición y reglas básicas. Cálculo diferencial. Khan Academy. <https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/dc-diff-intro>

Kuling, A. (1998). LJ Interviews Guido van Rossum. *Linux Journal*. <http://www.linuxjournal.com/article/2959>

Luis, P., & Rondero García, A. (2011). Cálculo Integral: Guía III.

Matemáticas II. (2018). Antiderevadas. Matemáticas II. <http://gerardaguilar20.blogspot.com/2014/11/antiderivadas.html>

Matemáticas. (2020). cómo se conforma el área bajo la curva de la integral - Búsqueda de Google. https://www.google.com/search?q=como+se+conforma+el+area+bajo+la+curva+de+la+integral&sca_esv=579536479&tbm=isch&sxsrf=AM9HkKnD6Ajw6EAqp7rjpumt6AxqHlzi5w:1699150025206&source=lnms&sa=X&ved=2ahUKEwjForCN46uCAxU-JkGoFHakRD3gQ_AUoAXoECAIQAw&biw=1536&bih=747&dpr=1.25#imgsrc=eGvQoRLh9UtOYM

Matemáticas, C., Magíster, I., Elizabeth Castro-Mayorga, M. I., Diana Rose-ro-Pazmiño III, L., & Cristina Sánchez-Rosero, A. I. (2023). Cálculo visual de integrales utilizando recursos didácticos. *Dominio de Las Ciencias*, 9(3), 2370-2380. <https://doi.org/10.23857/DC.V9I3.3562>

Mora, C. D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía*, 24(70), 181-272. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002&lng=es&nrm=i-so&tlng=es

Nieblas Aguilar, A. (2023). Estrategia didáctica para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las integrales dobles y su solución usando un software interactivo GeoGebra en estudiantes de diferentes carreras de la universidad autónoma de Sinaloa. Tesis, Universidad Autónoma de Sinaloa. <http://repo->

itorio.uas.edu.mx/jspui/handle/DGB_UAS/317

Pérez González, F. J. (2020). Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.

Pérez Pérez, W. A. (2015). Análisis matemático didáctico para generar y enseñar las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado. Tesis, Universidad de Piura. <https://pirhua.udep.edu.pe/handle/11042/5951>

Portal Académico CCH. (2022). Relación entre la integral definida y la integral indefinida. Portal Académico CCH. <https://portalacademico.cch.unam.mx/calculo2/la-integral-indefinida/relacion-entre-la-integral-definida-y-la-integral-indefinida>

Python. (2019). https://global.discourse-cdn.com/codecademy/optimized/5X/c/c/7/8/cc78742fcd4f36e7dd2371bf091c588f826ffb06_2_422x499.png - Búsqueda de Google. https://www.google.com/search?q=https%3A%2F%2Fglobal.discourse-cdn.com%2Fcodecademy%2Foptimized%2F5X%2Fc%2Fc%2F7%2F8%2Fcc78742fcd4f36e7dd2371bf091c588f826ffb06_2_422x499.png&tbm=isch&ved=2ahUKEwjUnoPolquCAxWsYZABHcCoDrAQ2-cCegQIABAA&oq=https%3A%2F%2Fglobal.discourse-cdn.com%2Fcodecademy%2Foptimized%2F5X%2Fc%2Fc%2F7%2F8%2Fcc78742fcd4f36e7dd2371bf091c588f826ffb06_2_422x499.png&gs_lcp=Cg-NpbWcQAzoHCAAQigUQQ1DFCFj3C2CLDmgAcAB4AIABuwGIAbs-BkgEDMC4xmAEAoAEBqgELZ3dzLXdpei1pbWewAQDAAQE&sclient=img&ei=5etGZZSYJ6zHwbkPwNG6gAs&bih=711&biw=1536&client=firefox-b-d#imgsrc=WUfy4OcFISZshM

Quora. (2020). ¿Cuáles son los 10 comandos más utilizados en python y cuáles son sus funciones? Quora. <https://es.quora.com/Cu%C3%A1les-son-los-10-comandos-mas-utilizados-en-python-y-cuales-son-sus-funciones>

Ramos Beltrán, A. (2021). Formulario a $\rightarrow$ integrales.

Rubí Miranda, J. (2023). Formulario de cálculo diferencial e integral. <http://mx.geocities.com/estadisticapapers/http://mx.geocities.com/dicalculus/>

Study Smarter. (2020). Integrales: Apuntes matemáticas bach. StudySmarter. <https://www.studysmarter.es/resumenes/matematicas/analisis-matematico/>

integrales/

Tenorio Quiñones, J. A. (2023). Estudio de las transformadas integrales como método de resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias y sus aplicaciones. Tesis, Universidad Tecnológica de Pereira. <https://hdl.handle.net/11059/14505>

Universidad de Talca. (2019). Formulario de Integrales. <http://matesup.cl/portal/apuntes/calculo2/cap02.pdf>

Uson. (2016). Métodos de integración.

VaxaSoftware. (2022). Tabla de integrales. www.vaxasoftware.com/indexes.html

Introducción a Solución de Integrales con Programación es una obra que inicia con una introducción clara del concepto de integral y su interpretación geométrica, estableciendo las bases teóricas necesarias para abordar ejercicios posteriores, se realiza una actualización de conocimientos computacionales en la solución de problemas. Se presenta ejercicios resueltos de integrales permitiendo que los lectores avancen en su comprensión y habilidades paso a paso. El libro tiene como objetivo aportar conocimiento a los estudiantes de la Facultad de Ingeniería Automotriz de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). Cuenta con ejercicios resueltos de manera analítica y gráficas mediante códigos de Google Colab de Programación (Python). El Capítulo I está enfocado a la parte teórica de las integrales donde se detallan las definiciones y fórmulas para los diferentes casos. En el Capítulo II se resuelven ejercicios con la combinación de los programas GeoGebra y Google Colab (Python) para las integrales definidas, mientras que para las integrales indefinidas se presentan ejercicios resueltos. En el Capítulo III se presentan ejercicios matemáticos resueltos con Google Colab (Python).

EMBER GEOVANNY ZUMBA NOVAY, ecuatoriano, nacido en la ciudad de Riobamba provincia de Chimborazo el 03 de abril de 1986, Ingeniero de Mantenimiento de la Facultad de Mecánica en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ingeniero en Administración y Producción Industrial en la Universidad Interamericana del Ecuador, Magíster en Diseño Industrial y de Procesos en la Universidad Particular SEK, Magíster en Educación, Tecnología e Innovación en la Universidad Politécnica Estatal del Carchi UPEC, Diplomado en Docencia Virtual en el Politécnico de Colombia. Analista Hidrosanitario y Jefe de Mantenimiento del Distrito de Salud 21DD04 2018 – 2019. Autor de los libros: «Lágrimas del Corazón», «Mantenimiento de Equipos Médicos», «Equipos de Medición y Calibración Mecánica -Zumba», «Gestión de Mantenimiento Automotriz», «Gestión de Mantenimiento Vehicular», «Introducción a Solución de Integrales con Programación», «Ecuador Renace». Autor de los artículos 1.- Desarrollo de competencias digitales en la educación superior a través de entornos virtuales. 2.- Technological Developments in the Intelligent Transportation System. 3.- Las herramientas tecnológicas en el desarrollo de habilidades y destrezas en la asignatura de Emprendimiento y Gestión. 4.- Optimization of the manufacturing process by 3D printing of the glass lift handle in Chevrolet Aveo Family. 5.- Alternative Material for the plastic injection molding of the Kia Rio's ventilation grille. 6.- Alternatives for strengthening virtual education based on information and communication technologies. 7.- Desarrollo de competencias digitales para docentes de la modalidad virtual en Educación Superior. 8.- DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL MODELS: AN EDUCATIONAL 9.- El aula como espacio de negociación - conflicto y los estilos de aprendizaje en alumnos de Educación Básica. 10.- Guía multimedia APK y su incidencia en el aprendizaje de matemáticas en estudiantes de educación general básica media durante el periodo de teletrabajo por emergencia sanitaria. 11.- Entornos para el aprendizaje de la Matemática aplicada en niños de Educación Básica Elemental. 12.- “Technological tools in the development of skills and abilities in the subject of Entrepreneurship and Management”. 13.- “Management of teacher learning with the use of ICT of the Extraordinary Educational Services for Youth and Adults of the Unified General Baccalaureate”. 14.- Programa didáctico con estrategias innovadoras mediado por el uso de las TIC para el desarrollo del hábito lector en estudiantes de segundo año de Educación General Básica. 15.- A DFT study on the application of B, N, and BN-doped phagraphene in Na-ion batteries. Docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo Facultad de Mecánica.

EMILY DANIELA TRAVEZ AREQUIPA, ecuatoriana, nacida en la ciudad de Latacunga provincia de Cotopaxi el 05 de septiembre del 2002, estudiante de cuarto semestre de la Facultad de Mecánica - Escuela de Ingeniería Automotriz de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).

ISBN: 978-9942-45-147-7

